



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE  
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica

KELVIN SOUZA DE OLIVEIRA

# **Propriedades aritméticas e combinatórias de funções que contam partições**

Campinas

2017

Kelvin Souza de Oliveira

## **Propriedades aritméticas e combinatórias de funções que contam partições**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Robson da Silva

Coorientador: José Plínio de Oliveira Santos

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Kelvin Souza de Oliveira e orientada pelo Prof. Dr. Robson da Silva.

Campinas

2017

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** FAPEAM, 003/2014

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

OL4p Oliveira, Kelvin Souza de, 1982-  
Propriedades aritméticas e combinatórias de funções que contam partições /  
Kelvin Souza de Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Robson da Silva.  
Coorientador: José Plínio de Oliveira Santos.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Partições (Matemática). 2. Identidade combinatória. 3. Teoria dos  
números. I. Silva, Robson da, 1980-. II. Santos, José Plínio de Oliveira, 1951-.  
III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Arithmetic and combinatorial properties of partition functions

**Palavras-chave em inglês:**

Partitions (Mathematics)

Combinatorial identities

Number theory

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Titulação:** Doutor em Matemática Aplicada

**Banca examinadora:**

José Plínio de Oliveira Santos [Coorientador]

Sueli Irene Rodrigues Costa

Kelly Cristina Poldi

Emerson Luiz do Monte Carmelo

Hemar Teixeira Godinho

**Data de defesa:** 11-08-2017

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada

**Tese de Doutorado defendida em 11 de agosto de 2017 e aprovada  
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS**

**Prof(a). Dr(a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA**

**Prof(a). Dr(a). KELLY CRISTINA POLDI**

**Prof(a). Dr(a). EMERSON LUIZ DO MONTE CARMELO**

**Prof(a). Dr(a). HEMAR TEIXEIRA GODINHO**

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

*Aos meus pais, Risenilde e Júnior, e avós, Lina e Francisca.*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom inefável da vida, amparo e guia.

Aos meus pais, Júnior e Risenilde, palavras sempre serão ínfimas para expressar o quanto sou grato por tudo que fizeram e fazem por mim.

À minha companheira Simone, cujo amor, carinho e compreensão foram muito além do que eu poderia imaginar e merecer.

Ao meu orientador, Robson da Silva — cujo exemplo almejo seguir em minha carreira acadêmica —, pelos conhecimentos compartilhados, paciência, dedicação e orientação.

Ao Professor José Plínio, pelo apoio, paciência e pelas aulas que ampliaram o horizonte para tão bela teoria de Combinatória Enumerativa.

Aos meus amigos, especialmente o Almir, que contribuiu para realização deste trabalho e amenizou os percalços nessa jornada.

À Universidade Federal do Amazonas, pela licença para capacitação e apoio financeiro.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM), pela concessão da bolsa de doutorado.

*“...mas uma coisa faço: esquecendo-me das coisas que para trás ficam e  
avançando para as que diante de mim estão,  
prossigo para o alvo...”  
(Filipenses 3:13-14)*

# Resumo

A primeira parte deste trabalho lida com identidades tendo como referência as caracterizações para certas classes de partições a partir de suas representações como matrizes de duas linhas, além de congruências do tipo Ramanujan para várias funções de partições sujeitas a restrição. Na segunda parte, introduzimos um novo objeto matemático denominado sobrepartições planas diagonais e apresentamos resultados relacionados com partições planas diagonais.

**Palavras-chave:** partição. sobrepartição plana diagonal. representação matricial. bijeção.



# Abstract

The first part of this work deals with identities related to the characterizations for certain classes of partitions in terms of their representations as two-line arrays, in addition to Ramanujan-type congruences for several constrained partition functions. In the second part, we introduce a new mathematical object called diagonal skew plane overpartitions and present results related to skew plane partitions.

**Keywords:** partition. skew plane overpartition. matrix representation. bijection.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>14</b>
1.1 Partições	14
1.2 Funções Geradoras	16
1.3 Identidades de Rogers-Ramanujan	18
1.4 Partições Planas	18
<b>2 Representações matriciais</b>	<b>20</b>
2.1 Introdução	20
2.2 Representação matricial para $p(n)$	20
2.3 Resultados para $p(n, j)$ módulo $p$	22
2.3.1 Resultados para $p(n, j) \pmod{2}$	23
2.3.2 Resultados para $p(n, j) \pmod{3}$	25
2.4 Período de $p(n, j)$ módulo $p$	26
<b>3 Funções sujeitas a restrição</b>	<b>30</b>
3.1 Funções $p_\omega(n, k)$ e $p_\nu(n, k)$	30
3.2 Função $p_{\pm l}^m(n, k)$	39
3.3 Partições com partes congruentes a 3, 4 ou 5 módulo 8	57
3.4 Partições com partes congruentes a $\pm 1, \pm 3$ módulo 7	63
3.5 Partições com partes pares distintas	68
3.6 Partições cúbicas	70
<b>4 Sobrepartições planas diagonais</b>	<b>75</b>
4.1 Introdução	75
4.2 Demonstrações dos resultados principais	79
<b>5 Considerações Finais</b>	<b>81</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>82</b>

# Introdução

A datar de 1669, Leibnitz indagou a John Bernoulli se ele já havia investigado questões envolvendo o cálculo do número de maneiras pelos quais um dado número pode ser expresso como uma soma de dois ou mais inteiros positivos, lançando assim as bases do estudo das partições de inteiros. Este é justamente o problema de dividir um determinado número em uma quantidade específica de partes. Porém, foi Leonhard Euler [1707-1783] o primeiro a apresentar resultados profundos na teoria de partições. Uma partição de um inteiro positivo  $n$  é, pois, um modo de expressá-lo como uma soma de um ou mais números inteiros positivos, sendo irrelevante a ordem desses inteiros.

É um fato notável que uma definição tão elementar tenha dado origem a um vasto campo de estudo. A teoria de partições de inteiros tem-se demonstrado um assunto de interesse permanente, repleto de resultados célebres e de inúmeras aplicações em vários ramos da matemática, física e estatística. Grandes matemáticos estiveram envolvidos no desenvolvimento da teoria, dentre estes, destacamos: Cayley, Gauss, Hardy, Jacobi, Lagrange, Legendre, Littlewood, Rademacher, Ramanujan, Schur, Sylvester e, mais recentemente, George Andrews.

Uma partição ordinária de um inteiro pode ser vista como uma partição em uma dimensão. É razoável tentar estender seus resultados para partições de inteiros em dimensões superiores, onde naturalmente surge o estudo de partições de dimensão dois — *partições planas*. Corteel e Lovejoy [24] lançaram os fundamentos de uma rica extensão de partições ordinárias para *sobrepartição*. Recentemente Corteel et al [25] uniram os dois conceitos e definiram *sobrepartições planas*.

Este trabalho — que encontra sua posição dentre os desenvolvimentos mais recentes em partições —, está dividido em duas partes: na primeira parte são apresentados resultados para várias funções que contam partições sujeitas a certas restrições. Na segunda parte, apresentamos resultados que generalizam um resultado de Andrews e Simay [11], publicado em 2016.

No primeiro capítulo são apresentados os conceitos fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, tais como: partição, partição plana, função geradora. No Capítulo 2 apresentamos resultados sobre funções que contam partições sob restrições dadas módulo um inteiro positivo  $m$ , tendo como inspiração as representações matriciais para certas classes de partições e os recentes estudos sobre a função  $p(n, j)$  (número de partições de  $n$  em exatamente  $j$  partes), esta função foi estudada extensivamente por Sylvester e Cayley [3] no final do Século XIX, uma vez que se relaciona com a teoria dos invariantes. Recentemente Kronholm [35, 36, 37] apresentou vários resultados sobre a função  $p(n, j)$  (mod

$p$ ), onde  $p$  é primo. As propriedades de periodicidade da sequência  $\{p(n, k)(\bmod m)\}_{n=0}$  foram estudadas em vários trabalhos [35, 36, 38, 43] por meio de métodos algébricos. Por exemplo, o artigo de Wilf e Nijenhuis [43], que descreve a periodicidade de  $p(n, k)$  módulo um primo  $p$ , envolve o uso de polinômios ciclotômicos sobre  $\mathbb{Z}_p[x]$ , para este caso apresentamos provas combinatórias de alguns resultados que podem ser deduzidos de [42, Theorem 2].

No terceiro capítulo, obtemos infinitas classes de congruências do tipo Ramanujan para várias funções de partições sujeitas à restrição quanto ao número de partes. Os teoremas deste capítulo foram inicialmente conjecturados utilizando o software *Mathematica*, onde foram implementadas as funções geradoras sujeitas à restrição quanto ao número de partes. A seguir, apresentamos sucintamente cada uma destas funções para as quais foram obtidos resultados sobre a periodicidade.

Em 2015 [10] as funções  $p_\omega(n)$  e  $p_\nu(n)$  foram definidas. Para um inteiro positivo  $n$ ,  $p_\omega(n)$  conta o número de partições em que todas as partes ímpares são menores que o dobro da menor parte, e  $p_\nu(n)$  conta o número de partições em que as partes são distintas e todas as partes ímpares são menores do que o dobro da menor parte. A função  $p_\omega(n)$  (resp.  $p_\nu(n)$ ) relaciona-se com a função mock theta de terceira ordem  $\omega(q)$  (resp.  $\nu(q)$ ), mais detalhes podem ser encontrados na página 30.

A função  $p_{\pm l}^m(n, k)$  conta o número de partições de  $n$  em exatamente  $k$  partes congruentes a  $\pm l$ . A definição desta função foi inspirada em duas das mais conhecidas identidades em teoria de partição, a saber, a primeira e a segunda identidade de Rogers-Ramanujan (veja página 18).

A função  $b(n)$  (resp.  $c(n)$ ) conta o número de partições de  $n$  cujas partes são congruentes a 3, 4 ou 5 módulo 8 (resp.  $\pm 1, \pm 3$  módulo 7). A primeira função relaciona-se com uma das identidades de Göllnitz-Gordon e a última possui uma interpretação combinatória bem intrigante (veja página 63), mais detalhes para ambas as funções podem ser encontrados em um trabalho de 2013 do Andrews [5].

Partições em que as partes pares são distintas ( $ped(n)$ ) têm sido amplamente estudadas nos últimos anos (veja [4, 8, 20, 26, 31, 54]). Em 2017, Merca [41] obteve uma relação de recorrência linear eficiente e estabeleceu conexões entre  $ped(n)$  e sobrepartições. Porém, em nenhum destes trabalhos citados são apresentados resultados para esta função sujeita à restrição quanto ao número de partes, na Seção 3.5 apresentamos dois teoremas com este enfoque.

Finalmente, a última função ( $a_r(n)$ ) do segundo capítulo é uma generalização para uma função que enumera partições cúbicas ( $a(n)$ ). Tais partições surgiram do estudo de Chan [17] das frações contínuas cúbicas de Ramanujan (de onde deriva o nome partições cúbicas). Posteriormente Kim [32] forneceu uma interpretação combinatória para  $a(n)$ : é

o número de partições com 2-cores de  $n$  com cores  $v$  e  $b$ , sujeitas a restrição que a cor  $b$  aparece somente nas partes pares. Tendo em vista esta interpretação definimos uma nova função de partição com  $r$ -cores que generaliza  $a(n)$ , obtendo resultados relacionados a periodicidade desta função módulo um inteiro  $m$ .

No último capítulo, obtemos resultados sobre novos objetos matemáticos denominados de *sobrep partições planas diagonais*. Os dois teoremas deste capítulo generalizam os Teoremas 1 e 2 de Andrews e Simay [11] apresentados em 2016.

Ao longo do texto, a partir do segundo capítulo, onde não forem apresentadas as referências para lemas, teoremas e proposições, significa que são resultados novos, demonstrados no texto.

# 1 Preliminares

Neste capítulo faremos uma breve exposição da teoria necessária para compreensão dos resultados principais. Abordaremos tópicos relacionados a partições de inteiros, funções geradoras e partições planas. Para uma breve introdução a esses assuntos, sugerimos ao leitor a referência [9].

## 1.1 Partições

Começamos com a definição principal que estará presente no decurso de todo o texto:

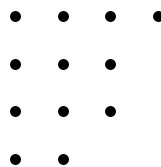
**Definição 1.1.** *Uma partição de um inteiro positivo  $n$  é uma coleção de inteiros positivos cuja soma é  $n$ , onde a ordem destas partes não importa. Denotaremos por  $p(n)$  o número de partições de  $n$ .*

Podemos representar uma partição  $\lambda$  de  $n$  por  $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$  ou  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ . Cada  $\lambda_i$  é uma parte da partição e o número de partes é denotado por  $l(\lambda)$ . O peso  $|\lambda|$  de  $\lambda$  é a soma de suas partes, isto é,  $|\lambda| = n$ .

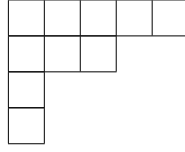
**Exemplo 1.1.** *Existem  $p(6) = 11$  partições de  $n = 6$  são:  $(6)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(4, 1, 1)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(3, 2, 1)$ ,  $(3, 1, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$ ,  $(2, 2, 1, 1)$ ,  $(2, 1, 1, 1, 1)$  e  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ .*

Uma partição  $\lambda$  do inteiro positivo  $n$  pode ser representada graficamente por meio de um arranjo de  $n$  pontos no plano constituído de  $l(\lambda)$  linhas em ordem não crescente. Em cada linha deste arranjo colocamos um número de pontos igual a cada uma de suas partes. Esta representação é denominada de *gráfico de Ferrers*. O diagrama de Young é obtido utilizando quadrados no lugar dos pontos. O exemplo a seguir ilustra os dois casos.

**Exemplo 1.2.** *O gráfico de Ferrers da partição  $(4, 3, 3, 2)$  e o diagrama de Young da partição  $(5, 3, 1, 1)$  são, respectivamente:*



e

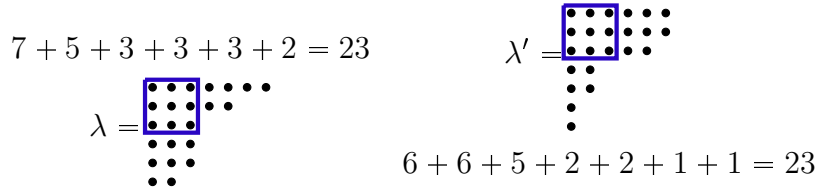


**Definição 1.2.** Dada uma partição, seu quadrado de Durfee é o maior quadrado que podemos encaixar no seu gráfico de Ferrers a partir do canto superior esquerdo.

De maneira mais formal, temos que o lado do quadrado de Durfee é o maior valor  $i$  tal que  $\lambda_i \geq i$ . Por exemplo, a partição  $\lambda = (6, 4, 3, 1, 1)$  tem quadrado de Durfee de lado 3.

Se no gráfico de Ferrers de uma partição  $\lambda$  de  $n$  trocarmos as linhas pelas colunas, obtemos a representação gráfica de uma outra partição  $\lambda'$  de  $n$ , chamada de partição conjugada da partição  $\lambda$ .

**Exemplo 1.3.** Os gráficos de Ferrers (quadrados de Durfee em destaque) de  $\lambda = 7 + 5 + 3 + 3 + 3 + 2$  e  $\lambda'$  são, respectivamente,



As representações gráficas de partições são ferramentas poderosas na demonstração de várias identidades, como por exemplo:

$$p(n \mid \text{a maior parte é } r) = p(n - r \mid \text{cada parte é } \leq r),$$

sendo  $n$  e  $r$  inteiros positivos, com  $n \geq r$ . De fato, dada uma partição  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$  de  $n$ , com  $\lambda_1 = r$  e  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$ , ao removermos a maior parte,  $\lambda_1$ , ficaremos com uma partição  $\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_s$  de  $n - r$  tal que cada parte é menor do que ou igual a  $r$ . Claramente este procedimento é invertível, bastando acrescentar uma parte  $r$  a qualquer partição de  $n - r$  com partes menores do que ou iguais a  $r$ . Assim, temos a bijeção desejada.

Na próxima proposição fazemos uso da conjugada de uma partição para obtermos uma prova bijetiva.

**Proposição 1.1.** O número de partições de  $n$  tendo  $k$  como a maior parte,  $q(n, k)$ , é igual ao número de partições de  $n$  com exatamente  $k$  partes,  $p(n, k)$ , isto é,  $q(n, k) = p(n, k)$ .

*Demonstração.* Usando o conceito de conjugada, temos que toda partição que possui  $k$  como maior parte é associada a uma partição que possui exatamente  $k$  partes. Da mesma

forma, toda partição que possui  $k$  partes é associada a uma partição que possui  $k$  como maior parte. Portanto,  $q(n, k) = p(n, k)$ .  $\square$

**Definição 1.3.** *Uma sobrepartição de um inteiro  $n$  é uma partição de  $n$  em que a última ocorrência de uma parte pode ser marcada.*

**Exemplo 1.4.** *As 14 sobrepartições de 4 são:  $4, \bar{4}, 3 + 1, \bar{3} + 1, 3 + \bar{1}, \bar{3} + \bar{1}, 2 + 2, 2 + \bar{2}, 2 + 1 + 1, 2 + 1 + \bar{1}, \bar{2} + 1 + 1, \bar{2} + 1 + \bar{1}, 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + \bar{1}$ .*

**Definição 1.4.** *O rank de uma partição  $\lambda$  é a diferença entre a maior parte e o número de partes de  $\lambda$ . Denotamos por  $r(\lambda)$  e temos  $r(\lambda) = \lambda_1 - l(\lambda)$ .*

Para mais detalhes e resultados em partições ver [2, 9].

## 1.2 Funções Geradoras

Nesta seção introduzimos de forma sucinta uma das principais ferramentas em combinatória enumerativa. Em linhas gerais, funções geradoras descrevem uma sequência infinita de números  $a_n$  tratando-os como os coeficientes de uma série de potências. Aqui não estamos interessados na convergência ou divergência das séries. De maneira formal, temos a seguinte definição:

**Definição 1.5.** *Dizemos que  $f(q)$  é a função geradora para a sequência  $(a_0, a_1, \dots)$  se sua expansão em séries de potência tem  $a_n$  como coeficiente de  $q^n$ .*

A seguir, apresentamos algumas funções geradoras para partições. Mais detalhes podem ser encontrados em [2].

**Exemplo 1.5.** *A função geradora para  $p(n)$ , o número de partições de  $n$ , é dada por:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}.$$

De fato,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k} = (1 + q + q^2 + \dots)(1 + q^{2 \cdot 1} + q^{2 \cdot 2} + \dots)(1 + q^{3 \cdot 1} + q^{3 \cdot 2} + \dots) \dots,$$

donde concluímos que as contribuições para o coeficiente de  $q^n$  vêm de um termo  $q^{a_1}$  da primeira série, de  $q^{2a_2}$  da segunda série, de  $q^{3a_3}$  da terceira, ..., de  $q^{ma_m}$  da  $m$ -ésima série, etc, onde  $a_i \geq 0$ , para todo  $i$ . Cada  $a_i$  deve ser visto como o número de partes iguais a  $i$  que aparecem na partição de  $n$ .

**Exemplo 1.6.** *O número de partições de  $n$  em partes distintas é igual ao número de partições de  $n$  em partes ímpares.*



*Demonstração.* Sabemos que a função geradora para partições em partes distintas é dada por

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^j)$$

e a função geradora para partições em partes ímpares é

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2k-1}}.$$

Iremos mostrar que essas duas expressões são iguais. Com efeito,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2k-1}} &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2k-1}} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2j}} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j}) \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^i} \prod_{j=1}^{\infty} [(1 - q^j)(1 + q^j)] \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^i} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j) \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^j) \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^j). \end{aligned}$$

□

**Exemplo 1.7.** A função geradora para sobrepartições é:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + q^k}{1 - q^k},$$

Com efeito, as partes marcadas formam uma partição em partes distintas (controlada por  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k)$ ) e as partes não marcadas formam uma partição ordinária (controlada por  $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}$ ).

Ao longo do texto utilizamos as seguintes notações:

$$(a; q)_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ (1 - a)(1 - aq) \cdots (1 - aq^{n-1}), & \text{se } n \geq 1, \end{cases}$$

e

$$(a; q)_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n = \prod_{n \geq 0} (1 - aq^n).$$

### 1.3 Identidades de Rogers-Ramanujan

As identidades de Rogers-Ramanujan estão entre as identidades mais conhecidas em teoria de partição. As fórmulas têm uma história curiosa, tendo sido provadas por Rogers (1894) em um artigo que foi completamente ignorado, então redescobertas (sem prova) por Ramanujan algum tempo antes de 1913. As fórmulas foram comunicadas a MacMahon, que então as publicou ainda sem prova. Então, em 1917, Ramanujan acidentalmente encontrou o artigo de Rogers de 1894 enquanto folheava um periódico, e então publicaram uma nova prova conjuntamente [48]. Enquanto isso, Schur (1917) independentemente redescobriu e publicou provas para as identidades (veja [30]).

Dizemos que as partes de uma partição são 2-distintas se a diferença entre quaisquer duas partes é maior do que ou igual a 2. De maneira mais geral, dizemos que uma partição tem partes  $d$ -distintas se a diferença entre estas partes é de pelo menos  $d$ . As identidades de Rogers-Ramanujan são:

**(Primeira identidade de Rogers-Ramanujan)** *O número de partições em partes congruentes a 1 ou  $-1$  módulo 5 é igual ao número de partições cujas partes são 2-distintas. Em termos de funções geradoras, temos*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5n-1})(1 - q^{5n-4})}.$$

**(Segunda identidade de Rogers-Ramanujan)** *O número de partições em partes congruentes a 2 ou  $-2$  módulo 5 é igual ao número de partições cujas partes são 2-distintas e maiores que 1. Em termos de funções geradoras, temos*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5n-2})(1 - q^{5n-3})}.$$

### 1.4 Partições Planas

Uma partição ordinária, pode ser vista como uma partição em uma dimensão. De fato, os elementos de uma partição  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$  são escritos em uma única linha. Podemos questionar sobre partições em dimensões superiores, que generalizam partições ordinárias. Neste contexto surge o estudo das partições em duas dimensões, ou seja, temos a seguinte definição.

**Definição 1.6.** *Uma partição plana de um inteiro  $n$  é um arranjo bidimensional de inteiros não-crescentes da esquerda para a direita e de cima para baixo, isto é, uma partição plana  $\lambda = \lambda_{1,1} + \dots + \lambda_{l,k}$  satisfaz  $\lambda_{i,j} \geq \lambda_{i,j+1}$  e  $\lambda_{i,j} \geq \lambda_{i+1,j}$ .*

[illegible]
$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^k)^k}.$$

## 2 Representações matriciais

### 2.1 Introdução

A função  $p(n, j)$ , que enumera as partições de  $n$  em exatamente  $j$  partes, foi estudada extensivamente por Sylvester e Cayley [3] no final do Século XIX, uma vez que se relaciona com a teoria dos invariantes. Esta função relaciona-se com  $p(n)$  pelo fato óbvio que  $p(n) = p(n, 1) + p(n, 2) + \dots + p(n, n)$ .

Recentemente Kronholm [34, 35, 36, 37] iniciou o estudo de congruências do tipo Ramanujan (veja Seção 2.4) para  $p(n, j)$ . Propriedades aritméticas de  $p(n, k)$  e infinitas classes de congruência do tipo Ramanujan para esta função são apresentadas em [34, 35, 37]. Em [36] explícitas congruências do tipo Ramanujan para  $p(n, j)$  módulo qualquer potência de um dado primo são apresentadas.

Neste capítulo apresentamos novos resultados para  $p(n, j)$ , tendo como motivação uma caracterização para  $p(n)$  em termos de matrizes de duas linhas.

### 2.2 Representação matricial para $p(n)$

Em [50] três caracterizações de partições irrestritas em termos de matrizes de duas linhas são apresentadas. A primeira caracterização é:

**Teorema 2.1** (Theorem 8, [50]). *O número de partições irrestritas de  $n$  é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

onde:

$$\begin{aligned} c_s &= 0, \\ c_t &= c_{t+1} + d_{t+1}, \quad \forall t < s, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Em [14] este teorema foi provado de duas maneiras diferentes, exibindo duas bijeções diferentes entre partições irrestritas e matrizes de duas linhas que satisfazem as condições (2.2). Descrevemos um deles através de um exemplo.

**Exemplo 2.1.** *O número  $s$  de colunas da matriz corresponde ao número de partes da partição. Considere a partição  $\lambda = 7 + 5 + 3 + 2 + 2$  de 19. Associamos a  $\lambda$  uma matriz*

A  $2 \times 5$  da forma dada no Teorema 2.1 de maneira que a soma das entradas de cada coluna de  $A$  são as partes de  $\lambda$ . Não temos outra escolha para a quinta coluna além de tomar  $c_5 = 0$  e  $d_5 = 2$ . Como  $c_4$  deve ser 2 e a soma das entradas da quarta coluna é 2, então  $d_4 = 0$ . Pelo mesmo argumento, devemos ter  $c_3 = 2$  e  $d_3 = 1$ . Também,  $c_2 = 3$ ,  $d_2 = 2$ ,  $c_1 = 5$  and  $d_1 = 2$ . A representação é

$$\lambda = 7 + 5 + 3 + 2 + 2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dada uma matriz satisfazendo (2.2), temos somente que somar as entradas em cada coluna a fim de obter a partição associada.

Como explicado em [50], a segunda linha da matriz (2.1) satisfazendo (2.2) fornece uma descrição completa da partição conjugada,  $\lambda'$ , de  $\lambda$ . Por exemplo, a segunda linha  $(2, 2, 1, 0, 2)$  indica que  $\lambda'$  contém duas partes 1, duas partes 2, uma parte 3, nenhuma parte 4 e duas partes 5. Este fato importante será essencial na próxima seção.

Descrevemos agora a construção de uma tabela a partir da qual os resultados apresentados na próxima seção foram motivados. Como ficará claro, as sequências de números inteiros que aparecem nas linhas dessa tabela têm muitas propriedades.

Para cada matriz  $A$  de duas linhas cujas entradas satisfazem as restrições (2.2), associamos uma matriz  $[B]_{2 \times 1}$ , cujas entradas são a soma das entradas em cada linha de  $A$ . Então, para cada  $n$  fixado, construímos uma tabela em que a entrada na linha  $n$  e coluna  $n - j$  é o número de vezes em que  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , aparece nas segundas linhas das matrizes  $B$ .

**Exemplo 2.2.** Listamos, para  $n = 5$ , as 7 matrizes  $A$  da caracterização dada pelo Teorema 2.1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Somando as entradas em cada linha obtemos suas respectivas matrizes  $[B]_{2 \times 1}$ :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Portanto, temos uma matriz com soma igual a 1 na segunda linha, duas matrizes com soma igual a 2, duas matrizes com soma igual a 3, uma matriz com soma igual a 4 e uma matriz com soma igual a 5 na segunda linha. Estes geram a sequência 1, 1, 2, 2, 1 que é organizada na tabela de acordo com a ordem crescente na primeira linha, da esquerda para a direita. Consulte a linha 5 na Tabela 1.

A Tabela 1 mostra os resultados obtidos das matrizes descritas no Teorema 2.1.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1																		
2	1	1																	
3	1	1	1																
4	1	1	2	1															
5	1	1	2	2	1														
6	1	1	2	3	3	1													
7	1	1	2	3	4	3	1												
8	1	1	2	3	5	5	4	1											
9	1	1	2	3	5	6	7	4	1										
10	1	1	2	3	5	7	9	8	5	1									
11	1	1	2	3	5	7	10	11	10	5	1								
12	1	1	2	3	5	7	11	13	15	12	6	1							
13	1	1	2	3	5	7	11	14	18	18	14	6	1						
14	1	1	2	3	5	7	11	15	20	23	23	16	7	1					
15	1	1	2	3	5	7	11	15	21	26	30	27	19	7	1				
16	1	1	2	3	5	7	11	15	22	28	35	37	34	21	8	1			
17	1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	38	44	47	39	24	8	1		
18	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	40	49	58	57	47	27	9	1	
19	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	52	65	71	70	54	30	9	1

Tabela 1 – Tabela a partir da caracterização dada pelo Teorema 2.1

**Observação 2.1.** As segundas linhas das matrizes do Teorema 2.1 dão descrições completas das partições conjugadas das partições representadas por essas matrizes. Portanto, essas segundas linhas nos dão todas as partições conjugadas das partições de  $n$ , ou seja, todas as partições de  $n$ . Então, somando todas as entradas na linha  $n$  da Tabela 1 o resultado é o número de partições de  $n$ .

**Observação 2.2.** Devido a caracterização dada pelo Teorema 2.1 temos que a entrada na linha  $n$  e coluna  $n - j$  apresenta o número de partições de  $n$  em exatamente  $j$  partes, ou seja,  $p(n, j)$ .

A seguir, apresentamos novos resultados para  $p(n, j)$  módulo um primo  $p$ .

## 2.3 Resultados para $p(n, j)$ módulo $p$

Apresentamos a seguir resultados aritméticos envolvendo a função  $p(n, j)$  módulo alguns números primos.

### 2.3.1 Resultados para $p(n, j) \pmod{2}$

Analisando a segunda diagonal da Tabela 1, isto é, o número de partições de  $n$  em exatamente duas partes, módulo 2, pode-se observar o seguinte resultado:

**Teorema 2.2.** *Seja  $n \geq 2$ . Então,*

$$p(n, 2) \equiv \begin{cases} 1 \pmod{2}, & \text{se } n \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ 0 \pmod{2}, & \text{se } n \equiv 0, 1 \pmod{4} \end{cases}$$

*Demonstração.* Há apenas uma partição de 2 e 3 em duas partes. Agora, supondo  $p(n, 2) \equiv 1 \pmod{2}$  para algum  $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$ , podemos transformar cada partição contada por  $p(n, 2)$  em uma partição de  $n + 4$  tendo duas partes. Basta adicionarmos 2 a cada parte. Observe que as partições obtidas desta forma têm partes maiores do que 2. Existem duas partições de  $n + 4$  em duas partes que não podem ser obtidas desta forma:  $(n + 3) + 1$  e  $(n + 2) + 2$ . Logo,  $p(n + 4, 2) = 2 + p(n, 2) \equiv 1 \pmod{2}$  por indução.

Da mesma forma, por indução, pode-se provar a segunda congruência.  $\square$

**Teorema 2.3.** *Seja  $n \geq 4$  par, então  $\sum_{j=2}^{n-1} p(j, 2) \equiv 0 \pmod{2}$ .*

*Demonstração.* Basta usar indução sobre  $n$  juntamente com a fórmula:  $p(n, 2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ .  $\square$

**Teorema 2.4.** *Para todo  $n \geq 3$ , temos que*

$$p(n, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) \not\equiv p(n - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1) \pmod{2}.$$

*Demonstração.* Primeiramente note que existe somente uma partição de  $n$  em  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  partes maiores do que 1,  $\forall n \geq 3$ : a partição com  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  partes 2 se  $n$  é par ou a partição tendo uma parte 3 e  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$  partes 2 se  $n$  é ímpar. O restante das partições contadas por  $p(n, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor)$  estão em correspondência bijetiva com as partições contadas por  $p(n - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1)$ . De fato, dada uma partição de  $n - 1$  em  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$  partes, adicionamos uma nova parte 1 e obtemos uma partição de  $n$  em  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  partes.  $\square$

**Teorema 2.5.** *Para todo  $n \geq 8$ , temos que*

$$n \equiv 1 \pmod{2} \implies p(n, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1) \not\equiv p(n - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2) \pmod{2}$$

e

$$n \equiv 0 \pmod{2} \implies p(n, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1) \equiv p(n - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2) \pmod{2}.$$

*Demonstração.* Em primeiro lugar, observamos que ao adicionarmos uma parte 1 às partições de  $n - 1$  em  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2$  partes, obtemos partições de  $n$  tendo  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$  partes e menor parte igual a 1. Agora iremos mostrar que o número de partições de  $n$  em  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$  partes maiores do que 1 é 3 se  $n$  é ímpar e 2 se  $n$  é par.

Entre as partições de  $n$  em  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$  partes maiores do que 1, temos que uma consiste de  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2$  partes 2 e uma maior parte  $\lambda_1$ . Esta maior parte satisfaz  $n = \lambda_1 + 2 \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 \right)$ , donde segue que  $\lambda_1$  é igual a 5 se  $n$  é ímpar ou 4 se  $n$  é par. Diminuindo esta maior parte e aumentando as outras partes, é fácil ver que o número de partições de  $n$  em  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$  partes maiores que 1 é 3 se  $n$  é ímpar ou 2 caso contrário.

Portanto,  $p(n, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1) = 3 + p(n - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2)$ , se  $n$  é ímpar, e  $p(n, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1) = 2 + p(n - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2)$ , se  $n$  é par, de onde temos as congruências desejadas.  $\square$

**Teorema 2.6.** *Seja  $j \in \{1, 2, 3, 6, 8, 11, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 30, 31, 33, 34\}$ . Para todo  $n \geq 6j + 3$  ímpar,  $p(n, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - j) \not\equiv p(n - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - j - 1) \pmod{2}$ .*

*Demonstração.* Podemos observar que  $p(n, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - j) = p(n - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - j - 1) + t$ , onde  $t = p(n \mid \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - j \text{ partes maiores que } 1)$ . Afirmamos que  $t = p(2j + 1)$ , desde que  $n \geq 6j + 3$ . De fato, considere os conjuntos:  $A = \{\text{partições de } n \text{ em } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - j \text{ partes maiores que } 1\}$ ,  $B = \{\text{partições de } n - 2j - 1 \text{ em } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - j \text{ partes maiores que } 1\}$  e  $C$  o conjunto das partições de  $2j + 1$ . Observe que o conjunto  $B$  possui um único elemento, denotamos por  $p_b$ . Não é difícil notar que o diagrama de Ferrers de toda partição  $p \in A$  é a junção do diagrama de alguma partição do conjunto  $C$  com o diagrama de  $p_b$ , desde que  $n \geq 6j + 3$ . A restrição  $n \geq 6j + 3$  permite que o diagrama de Ferrers de toda partição do conjunto  $C$  possa ser colocado à direita do diagrama da partição  $p_b$ . Além disso, para todos os  $j$ 's listados na hipótese temos que  $p(2j + 1) \equiv 1 \pmod{2}$ . Com estas observações segue o resultado.  $\square$

**Observação 2.3.** *Um questionamento natural que emerge do teorema anterior seria para quais valores de  $j$  temos que  $p(2j + 1) \equiv 1 \pmod{2}$ ? Porém, este é um problema na teoria de partições de inteiros que data da época em que Ramanujan indagou a MacMahon se ele já havia estudado a paridade da função  $p(n)$ . Posteriormente, após a morte de Ramanujan, MacMahon publicou um trabalho [39] em que apresenta um algoritmo para determinar a paridade de  $p(n)$  quando  $n \leq 1000$ . Atualmente, embora os valores de  $p(n)$  tenham sido computados para  $n$  em bilhões, nenhum padrão foi descoberto, ver [16, 44]. O teorema acima apresenta uma nova maneira de abordar a paridade de  $p(2j + 1)$  relacionando com a paridade de  $p(n, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - j)$ .*



### 2.3.2 Resultados para $p(n, j) \pmod{3}$

**Teorema 2.7.** *Se  $n \geq 7$  é ímpar, então*

$$p(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \equiv p(n-2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2) \pmod{3}.$$

*Demonstração.* Existe uma bijeção entre o conjunto de partições de  $n-2$  em  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$  partes e o conjunto de partições de  $n$  em  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  partes com ao menos duas partes iguais a 1. A fim de concluirmos a demonstração, devemos provar que o número de partições de  $n$  em  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  partes e no máximo uma parte 1 é sempre divisível por 3.

Para  $n = 7$  as partições relevantes são  $4 + 2 + 1$ ,  $3 + 3 + 1$  e  $3 + 2 + 2$ . Note que todas as partições de  $n$  em  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  partes e no máximo uma parte 1 têm no mínimo uma parte 2. Agora, por um argumento indutivo, segue que o número de partições de  $n$  em  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  partes e no máximo uma parte 1 é divisível por 3. Com efeito, se adicionarmos uma parte 2 para tais partições  $n-2$ , obtemos uma partição de  $n$  em  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  partes e no máximo uma parte 1.  $\square$

**Teorema 2.8.** *Para  $n \geq 8$  par, temos*

- (a)  $p(n, \frac{n}{2}) \not\equiv p(n-2, \frac{n}{2} - 2) \pmod{3}$
- (b)  $p(n, \frac{n}{2} - 1) \not\equiv p(n-2, \frac{n}{2} - 3) \pmod{3}$

*Demonstração.* Existe uma bijeção entre o conjunto de partições de  $n$  em  $\frac{n}{2}$  partes e no mínimo duas partes 1 e o conjunto de partições de  $n-2$  em  $\frac{n}{2} - 2$  partes. Basta adicionarmos duas novas partes 1 a essas partições do último conjunto. Agora mostraremos que o número de partições de  $n$  em  $\frac{n}{2}$  partes e no máximo uma parte 1 nunca é divisível por 3. Primeiramente, notamos que a maior parte  $\lambda_1$  de tais partições satisfazem  $2 \leq \lambda_1 \leq 3$ . Para  $n = 8$  as partições relevantes são  $3 + 2 + 2 + 1$  e  $2 + 2 + 2 + 2$ . Não é difícil ver que toda partição de  $n$  em  $\frac{n}{2}$  partes e no máximo uma parte 1 têm no mínimo uma parte 2. Por indução, segue que o número de partições de  $n$  em  $\frac{n}{2}$  partes e no máximo uma parte 1 nunca é divisível por 3.

Portanto  $p(n, \frac{n}{2}) \not\equiv p(n-2, \frac{n}{2} - 2) \pmod{3}$ . O item (b) pode ser demonstrado de maneira análoga.  $\square$

## 2.4 Período de $p(n, j)$ módulo $p$

Dentre os resultados mais conhecidos na teoria de partição de inteiros, destacam-se as congruências demonstradas por Ramanujan [46]:

$$\begin{aligned} p(5n + 4) &\equiv 0 \pmod{5}, \\ p(7n + 5) &\equiv 0 \pmod{7}, \\ p(11n + 6) &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Inspirado no trabalho de Ramanujan surgiram vários resultados envolvendo congruências para partições irrestritas [7, 12, 13, 27, 40, 44]. Recentemente, Kronholm e Larsen [37] estabeleceram várias congruências do tipo Ramanujan para a função  $p(n, k)$ , que enumera as partições de  $n$  em exatamente  $k$  partes. Claramente a partir do período de  $\{p(n, k) \pmod{m}\}$  podemos deduzir inúmeras congruências do tipo acima. Por exemplo,  $(p(n, 3) \pmod{3})$  tem período 18 (Teorema 2.11), pois como  $p(6, 3) \equiv 0 \pmod{3}$ , temos que  $p(18n + 6) \equiv 0 \pmod{3}$ .

As propriedades de periodicidade da sequência  $\{p(n, k) \pmod{m}\}_{n=0}$  foram estudadas em vários trabalhos [35, 36, 38, 43] por meio de métodos algébricos. Por exemplo, o artigo de Wilf e Nijenhuis [43], que descreve a periodicidade de  $p(n, k)$  módulo um primo  $p$ , envolve o uso de polinômios ciclotômicos sobre  $\mathbb{Z}_p[x]$ .

**Definição 2.1.** *Seja  $A(q) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n q^n$  uma série de potências formal com coeficientes inteiros e sejam  $d$  e  $l$  inteiros positivos. Dizemos que  $A(q)$  é periódica de período  $d$  módulo  $l$  se, para todo  $n \geq 0$ ,*

$$\alpha_{n+d} \equiv \alpha_n \pmod{l}.$$

*O menor inteiro positivo  $d$  satisfazendo esta propriedade é chamado de mínimo período de  $A(q)$  módulo  $l$ .*

A seguir, apresentamos provas combinatórias para resultados que podem ser deduzidos a partir do trabalho de Wilf e Nijenhuis [43].

**Teorema 2.9.** *Sejam  $n, m \geq 2$ . Então  $\{p(n, 2) \pmod{m}\}$  têm período:*

$$\begin{aligned} 2m &\quad \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 2m - 1 &\quad \text{se } n \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Primeiramente observe que se  $n \equiv 0 \pmod{2}$ , então  $p(n, 2) = p(n+1, 2)$ . De fato, dada uma partição enumerada por  $p(n, 2)$ , digamos  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ , então  $\lambda' = (\lambda_1 + 1, \lambda_2)$  é uma partição enumerada por  $p(n+1, 2)$ . Claramente a operação pode ser revertida. No caso  $n \equiv 1 \pmod{2}$  temos que  $p(n, 2) = 1 + p(n+1, 2)$ , pois existe uma única partição enumerada por  $p(n+1, 2)$  que não está em bijeção, a saber,  $p(n+1, 2, \lambda_1 = \lambda_2)$ .

Suponha  $n \equiv 0(\text{mod } 2)$ . Procedemos por indução em  $m$ . Queremos provar que  $p(n, 2) + m = p(n + 2m, 2)$ . Pelas observações acima, temos que  $p(n, 2) = p(n + 1, 2) = p(n + 2, 2) - 1 = p(n + 3, 2) - 1 = p(n + 4, 2) - 2$ , logo vale para  $m = 2$ . Suponha que a igualdade  $p(n, 2) + m = p(n + 2m, 2)$  seja válida para um  $m$  arbitrário. Usando a hipótese indutiva juntamente com as observações acima temos que  $p(n + 2(m + 1), 2) = p(n + 2 + 2m, 2) = p(n + 2, 2) + m = p(n, 2) + m + 1$ , o que conclui a prova indutiva. O caso  $n \equiv 1(\text{mod } 2)$  é análogo.  $\square$

**Teorema 2.10.** *A sequência  $\{p(n, 3)(\text{mod } 2)\}_{n \geq 3}$  tem período:*

$$\begin{array}{ll} 12 & \text{se } n \equiv 0(\text{mod } 2) \\ 6 & \text{se } n \equiv 1(\text{mod } 2). \end{array}$$

Para a prova deste resultado vamos precisar do seguinte lema:

**Lema 2.1.** *Para todo  $n \geq 3$ ,  $p(n, 3) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + p(n-3, 3)$ .*

*Demonstração.* Existe uma bijeção entre o conjunto de partições de  $n$  em 3 partes cujas partes são maiores do que 1 e o conjunto de partições de  $n-3$  em 3 partes. Além disso,  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  é exatamente o número de partições de  $n$  em 3 partes cuja menor parte é 1.  $\square$

*Demonstração do Teorema 2.10.* Pelo Lema 2.1, temos que  $p(n, 3) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + p(n-3, 3)$ . Suponha  $n \equiv 0(\text{mod } 2)$ , então  $n = 2k$ , para algum  $k \geq 2$ , uma vez que por hipótese  $n \geq 3$ . Logo  $p(n, 3) = k-1 + p(n-3, 3) = k-1 + k-2 + p(n-6, 3) = k-1 + k-2 + k-4 + p(n-9, 3) = 4k-12 + p(n-12, 3)$ . Portanto,  $p(n+12, 3) \equiv p(n, 3)(\text{mod } 2)$ , para todo  $n \geq 4$  tal que  $n \equiv 0(\text{mod } 2)$ , sendo 12 o menor inteiro positivo satisfazendo esta propriedade. O caso em que  $n \equiv 1(\text{mod } 2)$  é análogo.  $\square$

**Teorema 2.11.** *Seja  $p \geq 3$  ímpar. A sequência  $\{p(n, 3)(\text{mod } p)\}_{n \geq 3}$  tem período  $6p$ .*

*Demonstração.* Vamos provar que  $p(n, 3) \equiv p(n-6p, 3)(\text{mod } p)$ . Pelo Lema 2.1 temos que

$$p(n, 3) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n-(6p-2)}{2} \right\rfloor + p(n-3.2p, 3).$$

Precisamos mostrar que  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n-(6p-2)}{2} \right\rfloor$  é divisível por  $p$ . Suponha  $n$  par. Logo

$$\begin{aligned} & \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n-(6p-2)}{2} \right\rfloor = \\ & \frac{n-2}{2} + \frac{n-8}{2} + \frac{n-14}{2} + \cdots + \frac{n-(6p-4)}{2} + \frac{n-4}{2} + \frac{n-10}{2} + \frac{n-16}{2} + \cdots + \frac{n-(6p-2)}{2} = \\ & = p(n-3p). \end{aligned}$$

O caso  $n$  ímpar é análogo.  $\square$

**Teorema 2.12.** A sequência  $\{p(n, 4)(\text{mod } 2)\}_{n \geq 4}$  tem período 24.

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $p(n + 24, 4) \equiv p(n, 4)(\text{mod } 2)$ . Podemos estabelecer uma bijeção entre as partições de  $n + 24$  em 4 partes cujas partes são maiores do que 7 e as partições de  $n$  em 4 partes. Para isso basta acrescentarmos 6 em cada parte das partições enumeradas por  $p(n, 4)$ . Assim, temos que  $p(n + 24) = p(n, 4) + p(n + 24, 4; \lambda_4 \in [6])$ , onde  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Mas,  $p(n + 24, 4; \lambda_4 = 1) = p(n + 23, 3)$  e  $p(n + 24, 4; \lambda_4 = 2) = p(n + 19, 3)$ . De fato, a primeira igualdade é direta, precisamos provar apenas a última igualdade. Para isso estabeleceremos uma bijeção. Dada uma partição contada por  $p(n + 24, 4; \lambda_1 = 2)$ , retiramos a última linha do diagrama de Ferrers correspondente, a seguir removemos a primeira coluna. Assim obtemos partições enumeradas por  $p(n + 19, 3)$ . Claramente este procedimento é invertível, estabelecendo assim a bijeção pretendida. As próximas igualdades são obtidas através do procedimento anterior:  $p(n + 24, 4; \lambda_4 = 3) = p(n + 15, 3)$ ,  $p(n + 24, 4; \lambda_4 = 4) = p(n + 11, 3)$ ,  $p(n + 24, 4; \lambda_4 = 5) = p(n + 7, 3)$ ,  $p(n + 24, 4; \lambda_4 = 6) = p(n + 3, 3)$ . Segue que  $p(n + 24) = p(n, 4) + p(n + 23, 3) + p(n + 19, 3) + p(n + 15, 3) + p(n + 11, 3) + p(n + 7, 3) + p(n + 3, 3)$ . Mas,  $p(n + 15, 3; \lambda_3 \geq 5) = p(n + 3, 3)$ . Basta acrescentarmos 4 a cada parte das partições contadas por  $p(n, 3)$ . Reciprocamente, dada uma partição contada por  $p(n + 15, 3; \lambda_3 \geq 5)$ , podemos remover 4 de cada parte sem alterar o número de partes da partição, pois  $\lambda_3 \geq 5$ , obtendo uma partição de  $n + 3$  em 3 partes. Como  $p(n + 15, 3) = p(n + 15, 3; \lambda_3 \geq 5) + p(n + 15, 3; \lambda_3 \in [4])$  então  $p(n + 15, 3) = p(n + 3, 3) + p(n + 15, 3; \lambda_3 \in [4])$ . Não é difícil verificar a próxima igualdade, basta estabelecer uma bijeção para cada  $\lambda_3 \in [4]$ , obtendo  $p(n + 15, 3; \lambda_3 \in [4]) = p(n + 11, 2; \lambda_2 \geq 4) + p(n + 12, 2; \lambda_2 \geq 3) + p(n + 13, 2; \lambda_2 \geq 2) + p(n + 14, 2) = p(n + 5, 2) + p(n + 8, 2) + p(n + 11, 2) + p(n + 14, 2) = \left\lfloor \frac{n+5}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+8}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+11}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+14}{2} \right\rfloor$ , a última igualdade decorre do fato que  $p(n, 2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  e a penúltima igualdade não é difícil de ser obtida por meio de bijeções.

Afirmamos que  $\left\lfloor \frac{n+5}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+8}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+11}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+14}{2} \right\rfloor$  é um múltiplo de 2, digamos  $2l_1$ .

Com efeito, se  $n$  é par, então

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n+5}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+8}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+11}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+14}{2} \right\rfloor &= \frac{n+4}{2} + \frac{n+8}{2} + \frac{n+10}{2} + \frac{n+14}{2} \\ &= 2(n+9). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Se  $n$  é ímpar, então

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n+5}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+8}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+11}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+14}{2} \right\rfloor &= \frac{n+5}{2} + \frac{n+7}{2} + \frac{n+11}{2} + \frac{n+13}{2} \\ &= 2(n+9). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Assim,  $p(n + 15, 3) = p(n + 3, 3) + 2l_1$ . De maneira análoga, podemos ver que  $p(n + 19, 3) = p(n + 7, 3) + 2l_2$  e  $p(n + 23, 3) = p(n + 11, 3) + 2l_3$ . Resumindo, temos:  $p(n + 24, 4) =$

$p(n, 4) + (p(n + 23, 3) + p(n + 11, 3)) + (p(n + 19, 3) + p(n + 7, 3)) + (p(n + 15, 3) + p(n + 3, 3)) = p(n + 4, 4) + 2p(n + 11, 3) + 2p(n + 7, 3) + 2p(n + 3, 3) + 2(l_1 + l_2 + l_3)$ , donde  $p(n + 24, 4) \equiv p(n + 4, 4) \pmod{2}$ . Para concluir a prova, precisamos verificar que nenhum inteiro positivo  $m$  que divide 24 satisfaz tal propriedade, isto pode ser obtido olhando a Tabela 1  $\pmod{2}$ .  $\square$

**Teorema 2.13.** *A sequência  $\{p(n, 5) \pmod{2}\}_{n \geq 5}$  tem período 240.*

*Demonstração.* Sabemos que

$$\begin{aligned} p(n + 240, 5) &= p(n + 240, 5, \lambda_5 \geq 49) + p(n + 240, 5, \lambda_5 \leq 48) \\ &= p(n, 5) + p(n + 240, 5, \lambda_5 \leq 48). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} p(n + 240, 5, \lambda_5 \leq 48) &= p(n + 239, 4) + p(n + 234, 4) + p(n + 229, 4) + \\ &\quad + p(n + 224, 4) + \cdots + p(n + 9, 4) + p(n + 4, 4). \end{aligned}$$

É fácil ver que os termos do segundo membro da igualdade acima são congruentes dois a dois módulo 2, o que conclui a prova.  $\square$

## 3 Funções sujeitas a restrição

### 3.1 Funções $p_\omega(n, k)$ e $p_\nu(n, k)$

Em 2015 Andrews et al. [10] introduziram duas novas funções de partição, a saber  $p_\omega(n)$  e  $p_\nu(n)$ . Para um inteiro positivo  $n$ ,  $p_\omega(n)$  conta o número de partições em que todas as partes ímpares são menores que o dobro da menor parte, e  $p_\nu(n)$  conta o número de partições em que as partes são distintas e todas as partes ímpares são menores do que o dobro da menor parte. Então segue-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_\omega(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1 - q^n)(q^{n+1}; q)_n (q^{2n+2}; q^2)_\infty} \quad (3.1)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_\nu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n (-q^{n+1}; q)_n (-q^{2n+2}; q^2)_\infty. \quad (3.2)$$

A função  $p_\omega(n)$  relaciona-se com a função mock theta de terceira ordem devido a Ramanujan e Watson definida por, ([47, p. 15]),

$$\omega(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2+2n}}{(q; q^2)_{n+1}^2},$$

pois o lado direito de (3.1) é igual a  $q\omega(q)$  (veja [10, Theorem 3.1]). Por outro lado,  $p_\nu(n)$  está relacionada à função mock theta de terceira ordem, definida por, ([47, p. 31]),

$$\nu(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(-q; q^2)_{n+1}},$$

pois o lado direito de (3.2) é igual a  $\nu(-q)$  (veja [10, Theorem 4.1]).

A seguir, apresentamos resultados para essas duas funções sujeitas a restrição para o número de partes, ou seja, a função  $p_\omega(n, k)$  que conta o número de partições de  $n$  em exatamente  $k$  partes em que todas as partes ímpares são menores do que duas vezes a menor parte e  $p_\nu(n, k)$  conta o número de partições de  $n$  em exatamente  $k$  partes distintas e todas as partes ímpares são menores do que duas vezes a menor parte.

**Teorema 3.1.** *Seja  $p \geq 3$  ímpar. Então,  $p_\omega(n + 3p, 2) \equiv p_\omega(n, 2) \pmod{p}$ .*

*Demonstração.* Observemos, inicialmente, que

$$p_\omega(n, 2) = p_\omega(n + 3p, 2, \mu \geq p + 1, \lambda - \mu \geq p).$$

Com efeito, se  $(\lambda, \mu)$  é uma partição enumerada por  $p_\omega(n, 2)$  e  $\lambda$  é ímpar, então  $(\lambda + 2p, \mu + p)$  é uma partição de  $n + 3p$  em duas partes e, além disso, como  $\lambda < 2\mu$  temos  $\lambda + 2p < 2\mu + 2p = 2(\mu + p)$ , ou seja,  $(\lambda + 2p, \mu + p)$  é uma partição enumerada por  $p_\omega(n + 3p, 2)$ . O caso em que  $\lambda$  é par é óbvio. Reciprocamente, dada uma partição enumerada por  $p_\omega(n + 3p, 2, \mu \geq p + 1, \lambda - \mu \geq p)$ , subtraindo  $p$  da menor parte e  $2p$  da outra parte, obtemos uma partição enumerada por  $p_\omega(n, 2)$ .

Temos que  $p_\omega(n + 3p, 2) = p_\omega(n + 3p, 2, \mu \geq p + 1) + p_\omega(n + 3p, 2, \mu \leq p)$ . Mas,

$$\begin{aligned} p_\omega(n + 3p, 2, \mu \geq p + 1) &= p_\omega(n + 3p, 2, \mu \geq p + 1, \lambda - \mu \geq p) \\ &\quad + p_\omega(n + 3p, 2, \mu \geq p + 1, \lambda - \mu \leq p - 1) \\ &= p_\omega(n, 2) + \sum_{i=0}^{p-1} p_\omega(n + 3p, 2, \mu \geq p + 1, \lambda = \mu + i), \end{aligned}$$

com

$$\sum_{i=0}^{p-1} p_\omega(n + 3p, 2, \mu \geq p + 1, \lambda = \mu + i) = \begin{cases} \frac{p-1}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{p+1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

e

$$p_\omega(n + 3p, 2, \mu \leq p) = \sum_{j=0}^p p_\omega(n + 3p, 2, \mu = j),$$

com

$$\sum_{j=0}^p p_\omega(n + 3p, 2, \mu = j) = \begin{cases} \frac{p+1}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{p-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Logo,  $p_\omega(n + 3p, 2) = p_\omega(n, 2) + p$ , isto é,  $p_\omega(n + 3p, 2) \equiv p_\omega(n, 2) \pmod{p}$ .

□

**Teorema 3.2.** *Seja  $p \geq 3$  ímpar. A sequência  $\{p_\omega(n, 3)(\text{mod } p)\}_{n \geq 3}$  tem período  $15p$ .*

*Demonstração.* Vamos provar que  $p_\omega(n + 15p, 3) \equiv p_\omega(n, 3) \pmod{p}$ . Primeiramente note que  $p_\omega(n + 15p, 3) = p_\omega(n + 15p, 3, \lambda_3 \geq 3p + 1) + p_\omega(n + 15p, 3, \lambda_3 \leq 3p)$ . Mas  $p_\omega(n + 15p, 3, \lambda_3 \geq 3p + 1) = p_\omega(n + 15p, 3, \lambda_3 \geq 3p + 1, \lambda_2 - \lambda_3 \leq 3p - 1) + p_\omega(n + 15p, 3, \lambda_3 \geq 3p + 1, \lambda_2 - \lambda_3 \geq 3p)$ .

*Afirmção 1.*  $p_\omega(n, 3) = p_\omega(n + 15p, 3, \lambda_3 \geq 3p + 1, \lambda_2 - \lambda_3 \geq 3p)$ .

De fato, seja  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  uma partição enumerada por  $p_\omega(n, 3)$ . Então  $\lambda' = (\lambda_1 + 6p, \lambda_2 + 6p, \lambda_3 + 3p)$  é uma partição enumerada por  $p_\omega(n + 15p, 3, \lambda_3 \geq 3p + 1, \lambda_2 - \lambda_3 \geq 3p)$ , sendo este procedimento invertível, o que garante a bijeção.

Para concluir a prova do teorema ainda precisamos mostrar que  $p_\omega(n + 15p, 3, \lambda_3 \leq 3p) + p_\omega(n + 15p, 3, \lambda_3 \geq 3p + 1, \lambda_2 - \lambda_3 \leq 3p - 1)$  é um múltiplo de  $p$ . Para enumerar tais partições vamos considerar o caso  $n$  par, pois o caso ímpar é análogo.

- partições enumeradas por  $p_\omega(n + 15p, 3, \lambda_3 \leq 3p)$ , de acordo com  $\lambda_3$ :

$\lambda_3 = 1$  :  $\left\lfloor \frac{n + 15p - 1}{4} \right\rfloor$ , que é exatamente o número de partições de  $n + 15p - 1$  em duas partes pares;

$\lambda_3 = 2$  : 1, onde a única partição é  $(n + 15p - 5, 3, 2)$ ;

$\lambda_3 = 3$  :  $\left\lfloor \frac{n + 15p - 3}{4} \right\rfloor - 1$ ;

$\lambda_3 = 4$  : 2;

$\lambda_3 = 5$  :  $\left\lfloor \frac{n + 15p - 5}{4} \right\rfloor - 2$ ;

$\lambda_3 = 6$  : 3;

$\lambda_3 = 7$  :  $\left\lfloor \frac{n + 15p - 7}{4} \right\rfloor - 3$ ;

$\vdots$

$\lambda_3 = 3p - 1$  :  $\frac{3p - 1}{2}$ ;

$\lambda_3 = 3p$  :  $\left\lfloor \frac{n + 15p - 3p}{4} \right\rfloor - \frac{3p - 1}{2}$ .

- partições enumeradas por  $p_\omega(n + 15p, 3, \lambda_3 \geq 3p + 1, \lambda_2 - \lambda_3 \leq 3p - 1)$  de acordo com  $\lambda_2$ :

$\lambda_2 = \lambda_3$ : neste caso para satisfazer as condições de  $p_\omega(n + 15p, 3)$  temos que

$\lambda_3 \leq n + 15p - 2\lambda_3 \leq 2\lambda_3 - 1$ , isto é,  $\frac{n + 15p + 1}{4} \leq \lambda_3 \leq \frac{n + 15p}{3}$ . Por conseguinte o número de partições é dado por  $\left\lfloor \frac{n + 15p}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n + 15p + 1}{4} \right\rfloor + 1$ ;

$\lambda_2 = \lambda_3 + 1$ : temos que  $\lambda_3 \geq 3p + 1$  e  $\lambda_1 = n + 15p - 2\lambda_3 - 1 \geq \lambda_2 = \lambda_3 + 1$ , donde o número de partições é  $\left\lfloor \frac{n + 15p - 2}{3} \right\rfloor - 3p$ ;

$\vdots$

$\lambda_2 = \lambda_3 + 3p - 2$ :  $\left\lfloor \frac{n + 15p - 6p + 4}{3} \right\rfloor - 3p$ ;

$\lambda_2 = \lambda_3 + 3p - 1$ :  $\left\lfloor \frac{n + 15p - 6p + 2}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n + 15p - 3p + 2}{4} \right\rfloor + 1$ .

Portanto para  $n$  par o número total de partições é:

$$\sum_{i=0}^{\frac{3p-1}{2}} \left( \left\lfloor \frac{n + 15p - 2i - 1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n + 15p - 2i + 1}{4} \right\rfloor \right) + t + \frac{3p + 1}{2} - \frac{3p - 1}{2} 3p, \quad (3.3)$$

onde  $t = \sum_{i=1}^{3p} \left\lfloor \frac{n + 15p - 6p + 2i}{3} \right\rfloor$



*Afirmção 2.*

$$\sum_{i=0}^{\frac{3p-1}{2}} \left( \left\lfloor \frac{n+15p-2i-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+15p-2i+1}{4} \right\rfloor \right) = -\frac{3p+1}{2}. \quad (3.4)$$

Com efeito, como  $n$  é par,  $n+15p-3p=4m$  ou  $n+15p-3p=4m+2$ , com  $m \in \mathbb{N}$ . Assim precisamos analisar os seguintes casos:

i)  $\frac{3p+1}{2} = 2k$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$  e  $n+15p-3p=4m$ . Então a soma dos termos (denotaremos por  $s$ ) é dada por

$$s = m + m + \cdots + m + x + m + x - (m+1 + m+1 + \cdots + m+x+1 + m+x+1) = -(2x+2),$$

onde  $x = \left\lfloor \frac{3p-1}{4} \right\rfloor$ . Como  $\frac{3p+1}{2} = 2k$ , temos que  $\frac{3p+1}{4} = k$ , logo  $x = \left\lfloor \frac{3p-1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3p+1}{4} - \frac{1}{2} \right\rfloor = k-1$ . Mas  $s = -(2x+2) = -2k = -\frac{3p+1}{2}$ .

ii)  $\frac{3p+1}{2} = 2k$  e  $n+15p-3p=4m+2$ ,  
 $s = m + m + 1 + m + 1 + \cdots + m + x + m + x + 1 - (m+1 + m+2 + \cdots + m+x+1 + m+x+1 + m+x+2) = -(2x+2)$ , pelo caso anterior temos que  $s = -\frac{3p+1}{2}$ .

iii)  $\frac{3p+1}{2} = 2k+1$  e  $n+15p-3p=4m$ ,  
 $s = m + m + \cdots + m + x - 1 + m + x - 1 + m + x - (m+1 + m+1 + \cdots + m+x + m+x + m+x+1) = -(2x+1)$ . Mas  $\frac{3p+1}{2} = 2k+1$  logo  $\frac{3p+1}{4} = k + \frac{1}{2}$  donde  $x = \left\lfloor \frac{3p-1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3p+1}{4} - \frac{1}{2} \right\rfloor = k$ . Portanto  $s = -(2k+1) = -\frac{3p+1}{2}$ .

iv)  $\frac{3p+1}{2} = 2k+1$  e  $n+15p-3p=4m+2$ ,  
 $s = m + m + 1 + m + 1 + \cdots + m + x + m + x - (m+1 + m+2 + m+2 + \cdots + m+x+1 + m+x+1) = -(2x+1) = -\frac{3p+1}{2}$ . A última igualdade segue do caso iii. O que conclui a prova da Afirmção 2.

*Afirmção 3.  $t$  é divisível por  $p$ .*

Com efeito, basta analisar os resíduos de  $n+15p-6p+2$  módulo 3. Vejamos o caso em que  $n+15p-6p+2=3q$  para algum  $q \in \mathbb{N}$ . Logo

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{3p} \left\lfloor \frac{n+15p-6p+2i}{3} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{p-1} (q+2i+1) + 2 \sum_{i=0}^{p-1} (q+2i) \\ &= p(3p+3q-2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para os resíduos 1 e 2 módulo 3, temos que  $t = p(3p+3q-1)$  e  $t = p(3p+3q)$ , respectivamente. O que conclui a demonstração do teorema para o caso  $n$  par. Para  $n$  ímpar os argumentos são análogos.  $\square$

**Teorema 3.3.** *Seja  $p \geq 3$  ímpar. A sequência  $\{p_\nu(n, 2)(\text{mod } p)\}_{n \geq 3}$  tem período  $6p$ .*

*Demonstração.* Afirmamos que  $p_\nu(n + 6p, 2, \lambda_2 \geq 2p + 1, \lambda_1 - \lambda_2 \geq 2p + 1) = p_\nu(n, 2)$ . De fato, seja  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  uma partição contada por  $p_\nu(n + 6p, 2, \lambda_2 \geq 2p + 1, \lambda_1 - \lambda_2 \geq 2p + 1)$ . Então  $\lambda' = (\lambda_1 - 4p, \lambda_2 - 2p)$  é uma partição enumerada por  $p_\nu(n, 2)$ . Note que a imposição  $\lambda_1 - \lambda_2 \geq 2p + 1$  garante, que ao retirarmos  $4p, 2p$  de  $\lambda_1, \lambda_2$ , respectivamente, as partes continuem distintas. A operação inversa é facilmente obtida, garantindo a bijeção.

Agora precisamos enumerar o restante das partições contadas por  $p_\nu(n + 6p, 2)$  que não fazem parte da bijeção acima. Quando  $n$  é par, temos:

$$p_\nu(n + 6p, 2, \lambda_2 = 1) = 0 = p_\nu(n + 6p, 2, \lambda_2 \geq 2p + 1, \lambda_1 = \lambda_2 + 1)$$

$$p_\nu(n + 6p, 2, \lambda_2 = 2) = 1 = p_\nu(n + 6p, 2, \lambda_2 \geq 2p + 1, \lambda_1 = \lambda_2 + 2)$$

$\vdots$

$$p_\nu(n + 6p, 2, \lambda_2 = 2p) = 1 = p_\nu(n + 6p, 2, \lambda_2 \geq 2p + 1, \lambda_1 = \lambda_2 + 2p).$$

Assim para  $n$  par temos  $2p$  partições. Analogamente, quando  $n$  é ímpar temos o mesmo número de partições. Segue que  $p_\nu(n + 6p, 2) = p_\nu(n, 2) + 2p$ , o que conclui a prova.  $\square$

O período no caso  $p = 2$  difere do teorema anterior, porém sua prova é similar e, por esta razão, será omitida.

**Teorema 3.4.** *A sequência  $\{p_\nu(n, 2)(\text{mod } 2)\}_{n \geq 3}$  tem período 6.*

**Teorema 3.5.** *Seja  $p \geq 3$  ímpar. A sequência  $\{p_\nu(n, 3)(\text{mod } p)\}_{n \geq 6}$  tem período  $60p$ .*

*Demonstração.* Seja  $P_\nu(n, 3)$  o conjunto formado pelas partições enumeradas por  $p_\nu(n, 3)$ .

*Afirmção:*  $|P_\nu(n, 3)| = |B|$ , onde  $B = P_\nu(n + 60p, 3, \lambda_3 \geq 12p + 1, \lambda_2 - \lambda_3 \geq 12p + 1)$ .

Faremos uma prova bijetiva da afirmação. Seja  $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3) \in P_\nu(n, 3)$ . Então  $\lambda = (\lambda'_1 + 24p, \lambda'_2 + 24p, \lambda'_3 + 12p) \in B$ . De fato, se  $\lambda'_i$  é ímpar, então  $\lambda'_i < 2\lambda'_3$ ,  $i = 1, 2$ . Logo  $\lambda'_i + 24p < 2(\lambda'_3 + 12p)$ , se  $\lambda'_2$  é par, não há nada a provar. Reciprocamente, seja  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in B$ . Então  $\lambda' = (\lambda_1 - 24p, \lambda_2 - 24p, \lambda_3 - 12p) \in P_\nu(n, 3)$ , pois a condição  $\lambda_2 - \lambda_3 \geq 12p + 1$  garante que as partes de  $\lambda'$  são distintas.

Para concluir a prova do teorema, precisamos mostrar que  $|C| + |D| = qp$ , para algum inteiro positivo  $q$ , onde  $C = P_\nu(n + 60p, 3, \lambda_2 \geq 12p + 1, \lambda_2 - \lambda_3 \leq 12p)$  e  $D = P_\nu(n + 60p, 3, \lambda_3 \leq 12p)$ . Temos quatro casos:

**Caso 1:**  $n \equiv 0(\text{mod } 4)$

Abaixo, listamos o número de elementos do conjunto  $C$  de acordo com as possibilidades para  $\lambda_2$ , isto é,  $\lambda_3 + 1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 + 12p$ :

- $\lambda_2 = \lambda_3 + 1 \implies \lambda_3 + 2 \leq n + 60p - 2\lambda_3 - 1 \leq 2\lambda_3 - 1$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - 3}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n + 60p}{4} \right\rfloor + 1$  elementos;
- $\lambda_2 = \lambda_3 + 2$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - 5}{3} \right\rfloor - 12p$  elementos;
- $\lambda_2 = \lambda_3 + 3$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - 7}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n + 60p - 2}{4} \right\rfloor + 1$  elementos;
- $\vdots$
- $\lambda_2 = \lambda_3 + 12p - 1$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - 24p + 1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n + 60p - 12p + 2}{4} \right\rfloor + 1$  elementos;
- $\lambda_2 = \lambda_3 + 12p$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - 24p - 1}{3} \right\rfloor - 12p$  elementos.

A seguir listamos o número de elementos do conjunto  $D$  conforme os valores de  $\lambda_3$ .

- $\lambda_3 = 1$ : 0, pois  $n + 60p - 1$  ímpar, logo  $\lambda_i$  ímpar maior que duas vezes a menor parte para  $i = 1$  ou 2;
- $\lambda_3 = 2$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - 2}{4} \right\rfloor - 1$  elementos;
- $\lambda_3 = 3$ : 1 elemento;
- $\lambda_3 = 4$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - 4}{4} \right\rfloor - 3$  elementos;
- $\lambda_3 = 5$ : 2 elementos;
- $\vdots$
- $\lambda_3 = 12p - 4$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - (12p - 4)}{4} \right\rfloor - (6p - 1)$  elementos;
- $\lambda_3 = 12p - 3$ :  $6p - 2$  elementos;
- $\lambda_3 = 12p - 2$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - (12p - 2)}{4} \right\rfloor - (6p - 1)$  elementos;
- $\lambda_3 = 12p - 1$ :  $6p - 1$  elementos;
- $\lambda_3 = 12p$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - 12p}{4} \right\rfloor - 6p - 1$  elementos.

$$\text{Logo } |D| = \sum_{i=1}^{6p} \left\lfloor \frac{n+60p-2i}{4} \right\rfloor + (3p-1) \cdot (-1) - 6p - 1 = \sum_{i=1}^{6p} \left\lfloor \frac{n+60p-2i}{4} \right\rfloor - 9p.$$

Seja  $s = \sum_{i=1}^{6p} \left\lfloor \frac{n+60p-2i}{4} \right\rfloor - \sum_{i=0}^{6p-1} \left\lfloor \frac{n+60p-2i}{4} \right\rfloor$ . Como  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , temos que  $n+60p-12p = 4m$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Logo

$$\begin{aligned} s &= m + m + m + 1 + \cdots + m + 3p - 1 + m + 3p - 1 \\ &\quad - (m + 1 + m + 1 + \cdots + m + 3p + m + 3p) \\ &= -6p. \end{aligned}$$

Para concluir precisamos verificar que  $t = \sum_{i=0}^{12p-1} \left\lfloor \frac{n+60p-3-2i}{3} \right\rfloor$  é divisível por  $p$ . Avaliamos esta soma de acordo com o resíduo de  $n+60p-24p-1$  módulo 3:

- $n+60p-24p-1 \equiv 0 \pmod{3}$ , escreva  $n+36p-1 = 3k$ ,

$$\begin{aligned} t &= k + k + k + 1 + k + 2 + k + 2 + \cdots + k + 8p - 2 + k + 8p - 2 + k + 8p - 1 \\ &= 12pk + 2 \frac{(0+8p-2)4p}{2} + \frac{(1+8p-1)4p}{2} \\ &= p(12k + 48p - 8). \end{aligned}$$

- se  $n+60p-24p-1 \equiv 1 \pmod{3}$ , escreva  $n+36p-1 = 3k+1$ ,

$$\begin{aligned} t &= k + k + 1 + k + 1 + k + 2 + \cdots + k + 8p - 2 + k + 8p - 1 + k + 8p - 1 \\ &= 12pk + 2 \frac{(1+8p-1)4p}{2} + \frac{(0+8p-2)4p}{2} \\ &= p(12k + 48p - 4). \end{aligned}$$

- se  $n+60p-24p-1 \equiv 2 \pmod{3}$ , escreva  $n+36p-1 = 3k+2$ ,

$$\begin{aligned} t &= k + k + 1 + \cdots + k + 8p - 2 + k + 8p - 2 + k + 8p - 1 + k + 8p \\ &= 12pk + 2 \frac{(2+8p-2)(4p-1)}{2} + \frac{(1+8p-1)4p}{2} + 8p \\ &= p(12k + 48p). \end{aligned}$$

Segue que  $|C| + |D|$  é divisível por  $p$ .

**Caso 2:**  $n \equiv 2 \pmod{4}$

Para o conjunto  $C$  a análise é idêntica ao caso anterior, pois  $n$  é par em ambos os casos. E para o conjunto  $D$  temos

- $\lambda_3 = 1$ : 0, pois  $n+60p-1$  ímpar, logo  $\lambda_i$  ímpar maior que duas vezes a menor parte para  $i = 1$  ou  $2$ ;
- $\lambda_3 = 2$ :  $\left\lfloor \frac{n+60p-2}{4} \right\rfloor - 2$  elementos;

- $\lambda_3 = 3$ : 1 elemento;
- $\lambda_3 = 4$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - 4}{4} \right\rfloor - 2$  elementos;
- $\lambda_3 = 5$ : 2 elementos;
- $\vdots$
- $\lambda_3 = 12p - 4$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - (12p - 4)}{4} \right\rfloor - (6p - 2)$  elementos;
- $\lambda_3 = 12p - 3$ :  $6p - 2$  elementos;
- $\lambda_3 = 12p - 2$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - (12p - 2)}{4} \right\rfloor - 6p$  elementos;
- $\lambda_3 = 12p - 1$ :  $6p - 1$  elementos;
- $\lambda_3 = 12p$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - 12p}{4} \right\rfloor - 6p$  elementos.

$$\text{Logo } |D| = \sum_{i=1}^{6p} \left\lfloor \frac{n + 60p - 2i}{4} \right\rfloor + 3p \cdot (-1) - 6p = \sum_{i=1}^{6p} \left\lfloor \frac{n + 60p - 2i}{4} \right\rfloor - 9p.$$

Vamos calcular a soma  $s = \sum_{i=1}^{6p} \left\lfloor \frac{n + 60p - 2i}{4} \right\rfloor - \sum_{i=0}^{6p-1} \left\lfloor \frac{n + 60p - 2i}{4} \right\rfloor$ . Mas  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , donde  $n + 60p - 12p = 4m + 2$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Portanto

$$\begin{aligned} s &= m + m + 1 + m + 1 + \cdots + m + 3p - 1 + m + 3p - 1 + m + 3p \\ &\quad - (m + 1 + m + 2 + m + 2 + \cdots + m + 3p + m + 3p + m + 3p + 1) \\ &= -6p. \end{aligned}$$

**Caso 3:**  $n \equiv 1 \pmod{4}$

Para o conjunto  $C$  o número de elementos é dado por:

- $\lambda_2 = \lambda_3 + 1$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - 3}{3} \right\rfloor - 12p$  elementos;
- $\lambda_2 = \lambda_3 + 2$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - 5}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n + 60p - 1}{4} \right\rfloor + 1$  elementos;
- $\lambda_2 = \lambda_3 + 3$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - 7}{3} \right\rfloor - 12p$  elementos;
- $\vdots$
- $\lambda_2 = \lambda_3 + 12p - 1$ :  $\left\lfloor \frac{n + 60p - 24p + 1}{3} \right\rfloor - 12p$  elementos;

- $\lambda_2 = \lambda_3 + 12p: \left\lfloor \frac{n + 60p - 24p - 1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n + 60p - 12p + 1}{4} \right\rfloor + 1$  elementos.

E para o conjunto  $D$  temos

- $\lambda_3 = 1: \left\lfloor \frac{n + 60p - 1}{4} \right\rfloor - 1;$
- $\lambda_3 = 2: 1;$
- $\lambda_3 = 3: \left\lfloor \frac{n + 60p - 3}{4} \right\rfloor - 1;$
- $\lambda_3 = 4: 2;$
- $\vdots$
- $\lambda_3 = 12p - 3: \left\lfloor \frac{n + 60p - (12p - 3)}{4} \right\rfloor - (6p - 1);$
- $\lambda_3 = 12p - 2: 6p - 1;$
- $\lambda_3 = 12p - 1: \left\lfloor \frac{n + 60p - (12p - 1)}{4} \right\rfloor - (6p - 1);$
- $\lambda_3 = 12p: 6p$ , pois  $\lambda_2$  é ímpar e  $12p + 1 \leq \lambda_2 \leq 24p - 1$ .

Portanto  $|D| = \sum_{i=1}^{6p} \left\lfloor \frac{n + 60p - 2i + 1}{4} \right\rfloor + 3p$ .

Além disso,  $n + 60p - 12p + 1 = 4m + 2$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ , pois  $n \equiv 1 \pmod{4}$ .

Logo

$$\begin{aligned}
 s' &= \sum_{i=1}^{6p} \left\lfloor \frac{n + 60p - 2i + 1}{4} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{6p} \left\lfloor \frac{n + 60p - 2i + 1}{4} \right\rfloor \\
 &= m + m + 1 + m + 1 + \cdots + m + 3p - 1 + m + 3p - 1 + m + 3p \\
 &\quad - (m + 1 + m + 1 + m + 2 + m + 2 + \cdots + m + 3p + m + 3p) \\
 &= -3p.
 \end{aligned}$$

**Caso 4:**  $n \equiv 3 \pmod{4}$

Para o conjunto  $C$  a análise é idêntica ao caso anterior, pois  $n$  é ímpar em ambos os casos. E para o conjunto  $D$  temos

- $\lambda_3 = 1: \left\lfloor \frac{n + 60p - 1}{4} \right\rfloor;$
- $\lambda_3 = 2: 1;$
- $\lambda_3 = 3: \left\lfloor \frac{n + 60p - 3}{4} \right\rfloor - 2;$

- $\lambda_3 = 4: 2;$
- $\vdots$
- $\lambda_3 = 12p - 3: \left\lfloor \frac{n + 60p - (12p - 3)}{4} \right\rfloor - (6p - 2);$
- $\lambda_3 = 12p - 2: 6p - 1;$
- $\lambda_3 = 12p - 1: \left\lfloor \frac{n + 60p - (12p - 1)}{4} \right\rfloor - 6p;$
- $\lambda_3 = 12p: 6p$ , pois  $\lambda_2$  é ímpar e  $12p + 1 \leq \lambda_2 \leq 24p - 1$ .

Portanto  $|D| = \sum_{i=1}^{6p} \left\lfloor \frac{n + 60p - 2i + 1}{4} \right\rfloor + 3p$ . Como  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , temos que  $n + 60p - 12p + 1 = 4m$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Segue que

$$\begin{aligned}
 s' &= \sum_{i=1}^{6p} \left\lfloor \frac{n + 60p - 2i + 1}{4} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{6p} \left\lfloor \frac{n + 60p - 2i + 1}{4} \right\rfloor \\
 &= m + m + m + 1 + m + 1 + \cdots + m + 3p - 1 + m + 3p - 1 \\
 &\quad - (m + m + 1 + m + 1 + \cdots + m + 3p - 1 + m + 3p - 1 + m + 3p) \\
 &= -3p.
 \end{aligned}$$

Note que em todos os casos ocorre a soma  $t = \sum_{i=0}^{12p-1} \left\lfloor \frac{n + 60p - 3 - 2i}{3} \right\rfloor$  que foi avaliada no **Caso 1**.

Sendo assim, em qualquer caso temos que  $|C| + |D|$  é divisível por  $p$ .  $\square$

### 3.2 Função $p_{\pm l}^m(n, k)$

Dados  $n, m$  e  $l$  inteiros positivos tais que  $2l \leq m$ . Vamos denotar por  $p_{\pm l}^m(n, k)$  o número de partições de  $n$  em  $k$  partes congruentes a  $\pm l$  módulo  $m$ . Note que  $\sum_k p_{\pm 1}^5(n, k) = p(n \mid \text{partes} \equiv 1, 4 \pmod{5})$ . E pela *primeira identidade de Rogers-Ramanujan* temos que  $\sum_k p_{\pm 1}^5(n, k) = p(n \mid \text{partes são 2-distintas})$ . Além disso, pela *segunda identidade de Rogers-Ramanujan*, decorre que  $\sum_k p_{\pm 2}^5(n, k) = p(n \mid \text{partes são 2-distintas e } > 1)$ .

**Observação 3.1.** No que segue, sempre que a primeira letra de uma função de partição for maiúscula estaremos nos referindo ao conjunto das partições enumeradas por esta função. Assim, por exemplo,  $P_{\pm l}^m(n, k)$  denota o conjunto das partições enumeradas pela função  $p_{\pm l}^m(n, k)$ .

**Teorema 3.6.** Sejam  $m \geq 2$  um inteiro e  $p \geq 3$  ímpar. Então, a sequência  $\{p_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n, 2) \pmod{p}\}_{n \geq 2 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$  tem período  $2mp$ .

*Demonstração.* Suponhamos  $m$  ímpar, isto é,  $m = 2l + 1$ , para algum  $l \geq 1$ . Precisamos mostrar que  $p_{\pm l}^m(n, 2) \equiv p_{\pm l}^m(n + 2mp, 2) \pmod{p}$ . Afirmamos que  $P_{\pm l}^m(n, 2)$  está em bijeção com  $P_{\pm l}^m(n + 2mp, 2, \lambda_2 \geq l + mp)$ . Com efeito, dada uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in P_{\pm l}^m(n, 2)$ , temos que  $\lambda' = (\lambda_1 + mp, \lambda_2 + mp) \in P_{\pm l}^m(n + 2mp, 2, \lambda_2 \geq l + mp)$ . Além disso, a operação é invertível, garantindo a bijeção. A seguir enumeramos as partições de  $P_{\pm l}^m(n + 2mp, 2)$  que não estão em bijeção, ou seja,  $P_{\pm l}^m(n + 2mp, 2, \lambda_2 \leq l + mp - m + 1) = P_{\pm l}^m(n + 2mp, 2, \lambda_2 \leq mp - l)$ . Denotaremos este último conjunto por  $A$ . Listamos as partições do conjunto  $A$  de acordo com o valor de  $\lambda_2$ :

$\lambda_2 = l : \lambda_1 = n + 2mp - l$ , segue que  $(\lambda_1, \lambda_2) \in A$  se, e somente se,  $n \equiv 2l, 0 \pmod{m}$ ;

$\lambda_2 = l + 1 : \lambda_1 = n + 2mp - l - 1$ , segue que  $(\lambda_1, \lambda_2) \in A$  se, e somente se,  $n \equiv 1, 0 \pmod{m}$ ;

$\lambda_2 = l + m : \lambda_1 = n + 2mp - l - m$ , segue que  $(\lambda_1, \lambda_2) \in A$  se, e somente se,  $n \equiv 2l, 0 \pmod{m}$ ;

$\lambda_2 = l + 1 + m : \lambda_1 = n + 2mp - l - 1 - m$ , segue que  $(\lambda_1, \lambda_2) \in A$  se, e somente se,  $n \equiv 1, 0 \pmod{m}$ ;

$\vdots$

$\lambda_2 = mp - l - 1 : \lambda_1 = n + 2mp - (mp - l - 1)$ , segue que  $(\lambda_1, \lambda_2) \in A$  se, e somente se,  $n \equiv 2l, 0 \pmod{m}$ ;

$\lambda_2 = mp - l : \lambda_1 = n + mp + l$ , segue que  $(\lambda_1, \lambda_2) \in A$  se, e somente se,  $n \equiv 1, 0 \pmod{m}$ .

Portanto, se  $n \equiv 2l, 1 \pmod{m}$  então  $|A| = p$ , e se  $n \equiv 0 \pmod{m}$  então  $|A| = 2p$ . E para  $n \not\equiv 2l, 1, 0 \pmod{m}$ ,  $|A| = 0$ , concluindo a demonstração para  $m$  ímpar.

Seja  $m$  par,  $m = 2l$ ,  $l \geq 1$ . A bijeção estabelecida para o caso ímpar permanece inalterada, sendo assim, resta mostrar apenas que

$$t = p_l^m(n + 2mp, 2, \lambda_2 \leq mp - l) \equiv 0 \pmod{p}.$$

De fato, enumerando as partições contadas por  $t$  da mesma forma que fizemos para o caso  $m$  ímpar, lembrando que agora  $\lambda_2 \equiv l \pmod{m}$ , temos que  $t = p$  se  $n \equiv 2l \pmod{m}$  e  $t = 0$  caso contrário, o que conclui a prova para o caso  $m$  par.

□

O teorema anterior nos permite obter infinitas congruências do tipo Ramanujan para a função  $p_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n, 2)$ . O exemplo a seguir apresenta algumas dessas congruências para  $m = 5$  e  $p = 2, 3, 5$ .

**Exemplo 3.1.** Para todo  $n \geq 0$  temos:



1.  $p_{\pm 2}^5(4 + 20n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(5 + 20n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(6 + 20n, 2) \equiv 1(\text{mod } 2)$
2.  $p_{\pm 2}^5(10 + 20n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(14 + 20n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(16 + 20n, 2) \equiv 0(\text{mod } 2)$
3.  $p_{\pm 2}^5(4 + 30n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(5 + 30n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(6 + 30n, 2) \equiv 1(\text{mod } 3)$
4.  $p_{\pm 2}^5(10 + 30n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(14 + 30n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(16 + 30n, 2) \equiv 2(\text{mod } 3)$
5.  $p_{\pm 2}^5(15 + 30n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(24 + 30n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(26 + 30n, 2) \equiv 0(\text{mod } 3)$
6.  $p_{\pm 2}^5(9 + 50n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(11 + 50n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(30 + 50n, 2) \equiv 1(\text{mod } 5)$
7.  $p_{\pm 2}^5(16 + 50n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(19 + 50n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(21 + 50n, 2) \equiv 2(\text{mod } 5)$
8.  $p_{\pm 2}^5(26 + 50n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(29 + 50n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(31 + 50n, 2) \equiv 3(\text{mod } 5)$
9.  $p_{\pm 2}^5(36 + 50n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(39 + 50n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(41 + 50n, 2) \equiv 4(\text{mod } 5)$
10.  $p_{\pm 2}^5(46 + 50n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(49 + 50n, 2) \equiv p_{\pm 2}^5(51 + 50n, 2) \equiv 0(\text{mod } 5)$

**Teorema 3.7.** *Sejam  $m \geq 2$  inteiro e  $p \geq 3$  ímpar. Então para todo inteiro  $n \geq 3 \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ ,*

$$p_{\pm \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}^m(n, 3) \equiv p_{\pm \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}^m(n + 6mp, 3)(\text{mod } p).$$

*Demonstração.* Seja  $m \equiv 1(\text{mod } 2)$ ,  $m = 2l + 1$  para algum  $l \geq 1$ . Primeiramente estabelecemos uma bijeção entre  $P_{\pm l}^m(n, 3)$  e  $P_{\pm l}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \geq l + 2mp)$ . Seja  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in P_{\pm l}^m(n, 3)$ . Então  $\lambda' = (\lambda_1 + 2mp, \lambda_2 + 2mp, \lambda_3 + 2mp) \in P_{\pm l}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \geq l + 2mp)$ , uma vez que  $\lambda'_i \equiv \pm l(\text{mod } m)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . A condição  $\lambda_3 \geq l + 2mp$  garante que a operação seja invertível garantindo a bijeção. Agora enumeramos as partições de  $P_{\pm l}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 < l + 2mp) = P_{\pm l}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \leq 2mp - l)$ . Listamos a cardinalidade deste conjunto de acordo com os valores de  $\lambda_3$ :

- $\lambda_3 = l$ :

$$p_{\pm l}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 = l) = p_{\pm l}^m(n + 6mp - l, 2). \text{ Pelo Teorema 3.6, } p_{\pm l}^m(n + 6mp - l, 2) \equiv p_{\pm l}^m(n + 2mp - l, 2)(\text{mod } p).$$

*Afirmção 1:* Se  $n \not\equiv l, l - 1, l + 1(\text{mod } m)$  então  $p_{\pm l}^m(n + 2mp - l, 2) = 0$ .

De fato, basta verificarmos as possibilidades do resíduo de  $n$  por  $m = 2l + 1$ . Seja  $n = qm + r$ , onde  $0 \leq r \leq m - 1$ . Temos as seguintes possibilidades para  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in P_{\pm l}^m(n + 2mp - l, 2)$ :

- (i)  $\lambda_1, \lambda_2 \equiv l(\text{mod } m)$ , então  $r = l - 1$ ;
- (ii)  $\lambda_1, \lambda_2 \equiv l + 1(\text{mod } m)$ , então  $r = l + 1$ ;
- (iii)  $\lambda_1 \equiv l(\text{mod } m), \lambda_2 \equiv l + 1(\text{mod } m)$ , então  $r = l$ ;
- (iv)  $\lambda_1 \equiv l + 1(\text{mod } m), \lambda_2 \equiv l(\text{mod } m)$ , então  $r = l$ .

*Afirmção 2:* Se  $n = qm + l - 1$  então

$$p_{\pm l}^m(n + 2mp - l, 2) = \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor + 1.$$

Com efeito, se  $n = qm + l - 1$  então  $\lambda_1, \lambda_2 \equiv l \pmod{m}$ . Portanto  $\lambda_2 = tm + l$ , onde  $0 \leq t$  e  $\lambda_2 \leq \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2} \right\rfloor$ . Por conseguinte,  $0 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor$ , donde segue a afirmação.

*Afirmção 3:* Se  $n = qm + l + 1$  então

$$p_{\pm l}^m(n + 2mp - l, 2) = \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l + 1}{m} \right\rfloor + 1.$$

A prova desta afirmação é análoga a anterior, sendo que neste caso  $\lambda_1, \lambda_2 \equiv l + 1 \pmod{m}$ .

*Afirmção 4:* Se  $n = qm + l$  então

$$p_{\pm l}^m(n + 2mp - l, 2) = \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l + 1}{m} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor + 1.$$

Para esta demonstrar esta afirmação, note que se  $n = qm + l$  então  $\lambda_2 \equiv l \pmod{m}$  ou  $\lambda_2 \equiv l + 1 \pmod{m}$ , usando as Afirmções 2 e 3 segue o resultado.

- $\lambda_3 = l + 1$ :

Neste caso precisamos encontrar o valor de  $p_{\pm l}^m(n + 2mp - (l + 1), 2, \lambda_2 \geq l + 1) = t$ .

*Afirmção 5:* Se  $n = qm + l$  então

$$t = \left\lfloor \frac{n + 2mp - l - 1}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor.$$

De fato, Se  $n = qm + l$  então  $\lambda_1, \lambda_2 \equiv l \pmod{m}$ , assim  $\lambda_2 = km + l$ , onde  $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n + 2mp - l - 1}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor$ .

*Afirmção 6:* Se  $n = qm + l + 1$  então

$$t = \left\lfloor \frac{n + 2mp - l - 1}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n + 2mp - l - 1}{2m} - \frac{l + 1}{m} \right\rfloor + 1.$$

Com efeito, como  $n = qm + l + 1$  então  $\lambda_2 \equiv l, l + 1 \pmod{m}$ . Quando  $\lambda_2 \equiv l \pmod{m}$  temos  $\left\lfloor \frac{n + 2mp - l - 1}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor$  partições enumeradas por  $t$  e  $\lambda_2 \equiv l + 1 \pmod{m}$  fornece o restante das partições contadas  $t$ .

*Afirmção 7:* Se  $n = qm + l + 2$  então

$$p_{\pm l}^m(n + 2mp - l - 1, 2) = \left\lfloor \frac{n + 2mp - l - 1}{2m} - \frac{l + 1}{m} \right\rfloor + 1.$$

Para este caso, temos  $\lambda_1, \lambda_2 \equiv l + 1 \pmod{m}$  e segue a afirmação.

Prosseguimos analisando os valores de  $\lambda_3$ . Denotemos  $s = p_{\pm l}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \leq 2mp - l)$ . Segue que  $s = 0$  se o resíduo de  $n$  módulo  $m$  não está no conjunto  $A = \{l - 1, l, l + 1, l + 2\}$ . Para  $n \in A$ , temos:

a)  $n = qm + l - 1$ :

$$s = \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{n + 2mp - l - m}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n + l + 1}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor - 2p + 2.$$

Agora os possíveis resíduos de  $n + 2mp - l$  módulo  $2m$  são  $m - 1$  e  $2m - 1$ . De fato, escrevendo  $n + 2mp - l = 2mt' + r$ , onde  $0 \leq r \leq 2m - 1$  e lembrando que  $n = qm + l - 1$ , segue que  $m \mid (r + 1)$ . Logo  $r = m - 1$  ou  $r = 2m - 1$ . No restante da prova denotamos por  $-b, -b'$  as somas  $\sum_{i=2}^{-2+2p} i$  e  $\sum_{i=1}^{-1+2p} i$ , respectivamente. Vejamos as duas possibilidades para  $r$ :

$$1. \ r = m - 1: \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor = \left\lfloor t' + \frac{m - 1}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor = [t'], \text{ pois } m = 2l + 1.$$

Logo

$$\begin{aligned} s &= t' + t' - 1 + t' - 1 + \cdots + t' - (p - 1) + t' - (p - 1) + t' - p + b \\ &= p(2t' + 3 - 3p). \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$2. \ r = 2m - 1: \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor = \left\lfloor t' + \frac{2m - 1}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor = [t' + 0, 5]. \text{ Assim,}$$

$$\begin{aligned} s &= t' + t' + \cdots + t' - (p - 1) + t' - (p - 1) + b \\ &= p(2t' + 4 - 3p). \end{aligned} \quad (3.7)$$

b)  $n = qm + l$ :

$$s = s' + s'' + s''', \text{ onde}$$

$$s' = \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor + 1 + \cdots + \left\lfloor \frac{n + l + 1}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor + 2 - 2p,$$

$$s'' = \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l + 1}{m} \right\rfloor + 1 + \cdots + \left\lfloor \frac{n + l + 1}{2m} - \frac{l + 1}{m} \right\rfloor + 2 - 2p,$$

$$s''' = \left\lfloor \frac{n + 2mp - l - 1}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n + l}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor + 1 - 2p.$$

Para  $s'$ , temos  $n = qm + l$  e  $n + 2mp - l = 2mt' + r$ ,  $0 \leq r \leq 2m - 1$  então  $r = 0$  ou  $r = m$ .

$$1. \ r = 0: \text{ Como } \frac{l}{m} < \frac{1}{2}, \text{ segue que}$$

$$\begin{aligned} s' &= t' - 1 + t' - 1 + \cdots + t' - p + t' - p + b \\ &= p(2t' + 2 - 3p). \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$2. \ r = m: \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor = \lfloor t' \rfloor. \text{ Portanto}$$

$$\begin{aligned} s' &= t' + t' - 1 + t' - 1 + \cdots + t' - (p-1) + t' - (p-1) + t' - p + b \\ &= p(2t' + 3 - 3p). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Agora calculamos  $s''$ . Note que, analogamente ao caso  $s'$ , temos  $r = 0$  ou  $r = m$ . Porém, precisamos de uma estimativa para o fator  $\frac{l+1}{m}$ .

Afirmamos que  $0,5 < \frac{l+1}{m} < 1$ . Provamos por absurdo:

Suponha  $\frac{l+1}{m} \geq 1$  ou  $\frac{l+1}{m} \leq \frac{1}{2}$  o que implicaria  $m \leq 1$  ou  $m+1 \leq m$ , absurdo. O que conclui a prova da afirmativa.

Com a estimativa de  $\frac{l+1}{m}$ , segue que

$$1. \ r = 0:$$

$$\begin{aligned} s'' &= t' - 1 + t' - 2 + t' - 2 + \cdots + t' - p + t' - p + t' - (p+1) + b \\ &= p(2t' + 1 - 3p). \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$2. \ r = m:$$

$$\begin{aligned} s'' &= t' - 1 + t' - 1 + \cdots + t' - p + t' - p + b \\ &= p(2t' + 2 - 3p). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Finalmente para  $s'''$ ,  $n + 2mp - l - 1 = 2mt' + r$ , temos

$$1. \ r = m - 1: \left\lfloor \frac{n + 2mp - l - 1}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor = \left\lfloor t' + \frac{m-1}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor = \lfloor t' \rfloor. \text{ Logo,}$$

$$\begin{aligned} s''' &= t' + t' - 1 + t' - 1 + \cdots + t' - p + b' \\ &= p(2t' + 1 - 3p). \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$2. \ r = 2m - 1: \left\lfloor \frac{n + 2mp - l - 1}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor = \left\lfloor t' + \frac{2m-1}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor = \lfloor t' + 0,5 \rfloor.$$

Então,

$$\begin{aligned} s''' &= t' + t' + \cdots + t' - (p-1) + t' - (p-1) + b' \\ &= p(2t' + 2 - 3p). \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$c) \ n = qm + l + 1:$$

$s = f + g + h$ , onde

$$f = \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l+1}{m} \right\rfloor + 1 + \cdots + \left\lfloor \frac{n + l + 1}{2m} - \frac{l+1}{m} \right\rfloor + 2 - 2p,$$

$$g = \left\lfloor \frac{n + 2mp - l - 1}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n + l}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor + 1 - 2p,$$

$$h = \left\lfloor \frac{n + 2mp - l - 1}{2m} - \frac{l + 1}{m} \right\rfloor + 1 + \cdots + \left\lfloor \frac{n + l}{2m} - \frac{l + 1}{m} \right\rfloor + 2 - 2p.$$

Para calcular  $f$ ,  $n + 2mp - l = 2mt' + r$ , temos:

$$\begin{aligned} 1. \quad r = 1: \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l + 1}{m} \right\rfloor &= \left\lfloor t' - \frac{1}{2} \right\rfloor. \text{ Logo} \\ f &= t' - 1 + t' - 1 + \cdots + t' - p + b \\ &= p(2t' + 2 - 3p). \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad r = m + 1: \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l + 1}{m} \right\rfloor &= \lfloor t' \rfloor. \text{ Logo} \\ f &= t' + t' - 1 + \cdots + t' - (p - 1) + t' - p + b \\ &= p(2t' + 3 - 3p). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para  $g, h$  temos

1.  $r = 0$ :

$$\begin{aligned} g &= t' - 1 + t' - 1 + \cdots + t' - p + b' \\ &= p(2t' - 3p); \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} h &= t' - 1 + t' - 2 + \cdots + t' - (p + 1) + b \\ &= p(2t' + 1 - 3p). \end{aligned} \quad (3.17)$$

2.  $r = m$ :

$$\begin{aligned} g &= t' + t' - 1 + \cdots + t' - p + b' \\ &= p(2t' + 1 - 3p); \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} h &= t' - 1 + t' - 1 + \cdots + t' - p + b \\ &= p(2t' + 2 - 3p). \end{aligned} \quad (3.19)$$

d)  $n = qm + l + 2$ :

$$\begin{aligned} s &= \left\lfloor \frac{n + 2mp - l - 1}{2m} - \frac{l + 1}{m} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{n + 2mp - l - 1 - m}{2m} - \frac{l + 1}{m} \right\rfloor + \cdots + \\ &+ \left\lfloor \frac{n + l}{2m} - \frac{l + 1}{m} \right\rfloor + 2 - 2p. \end{aligned}$$

Neste caso as possibilidades são:

1.  $r = 1$ :

$$\begin{aligned} s &= t' - 1 + t' - 1 + \cdots + t' - p + b \\ &= p(2t' + 2 - 3p). \end{aligned} \quad (3.20)$$

2.  $r = m + 1$ :

$$\begin{aligned} s &= t' + t' - 1 + \cdots + t' - (p - 1) + t' - p + b \\ &= p(2t' + 3 - 3p). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Portanto,  $p_{\pm l}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \leq 2mp - l) = s \equiv 0 \pmod{p}$ , o que conclui a prova para  $m$  ímpar.

Seja  $m$  par,  $m = 2l$ . Precisamos apenas encontrar o valor de  $u = p_{\pm l}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \leq 2mp - l)$ . Note que neste caso,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in P_{\pm l}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \leq 2mp - l)$  significa que  $\lambda_i \equiv l \pmod{m}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Assim, escrevendo  $n = qm + r$  onde  $0 \leq r \leq m - 1$ , temos que a única possibilidade é  $r = l$ . Por meio de uma análise análoga ao caso  $m$  ímpar podemos concluir que  $u = 0$  se  $n \neq n + qm + l$  e para  $n = qm + l$  temos

$$u = \left\lfloor \frac{n + 2mp - l}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{n + 2mp - l - m}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n + l}{2m} - \frac{l}{m} \right\rfloor + 2 - 2p.$$

O cálculo de  $u$  é idêntico ao que foi feito no item b) para  $s'$ , donde concluímos que para todo inteiro  $m \geq 2$ ,  $p_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n, 3) \equiv p_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n + 6mp, 3) \pmod{p}$ .  $\square$

Para cada  $m \geq 2$ , o Teorema 3.7 fornece uma lista infinita de congruências do tipo Ramanujan para a função  $p_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n, 3)$ .

O lema a seguir será crucial na demonstração do próximo teorema. Denotaremos por  $p_{\leq k}(n)$  a função que enumera o número de partições de  $n$  em no máximo  $k$  partes.

**Lema 3.1.** *Seja  $n \geq 3$ . Então  $p_{\leq 3}(n, \lambda_2 - \lambda_3 \geq 1) = p_{\leq 3}(n + 4, \lambda_3 \geq 2)$ . Além disso,*

$$p_{\leq 3}(n + 4, \lambda_3 \leq 1) = \left\lfloor \frac{n + 3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n + 4}{2} \right\rfloor + 1$$

e

$$p_{\leq 3}(n, \lambda_2 - \lambda_3 = 0) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1.$$

*Demonstração.* Faremos uma prova bijetiva para a primeira parte do lema. Seja  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  uma partição enumerada por  $p_{\leq 3}(n, \lambda_2 - \lambda_3 \geq 1)$ . Note que eventualmente podemos ter  $\lambda_3 = 0$ . Então  $\lambda' = (\lambda + 1, \lambda_2 + 1, \lambda_3 + 2)$  é uma partição enumerada por  $p_{\leq 3}(n + 4, \lambda_3 \geq 2)$ . Reciprocamente dada uma partição  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  enumerada por  $p_{\leq 3}(n + 4, \mu_3 \geq 2)$ , como  $\mu_3 \geq 2$ , temos que  $\mu' = (\mu_1 - 1, \mu_2 - 1, \mu_3 - 2)$  é uma partição enumerada por  $p_{\leq 3}(n, \lambda_2 - \lambda_3 \geq 1)$ , o que conclui a bijeção.

Para a prova dos últimos dois resultados, sabemos que  $p_{\leq 3}(n + 4, \lambda_3 \leq 1) = p_{\leq 3}(n + 4, \lambda_3 = 1) + p_{\leq 3}(n + 4, \lambda_3 = 0)$ , mas  $p_{\leq 3}(n + 4, \lambda_3 = 1) = \left\lfloor \frac{n + 3}{2} \right\rfloor$  e  $p_{\leq 3}(n + 4, \lambda_3 = 0) = p_{\leq 2}(n + 4) = \left\lfloor \frac{n + 4}{2} \right\rfloor + 1$ . Finalmente, para  $p_{\leq 3}(n, \lambda_2 - \lambda_3 = 0)$ , temos que  $\lambda_2 \in \{0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\}$ , concluindo a prova.  $\square$

**Teorema 3.8.** Para  $n \geq 4$ ,

$$p_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n, 4) \equiv p_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n + 24m, 4) \pmod{2}.$$

*Demonstração.* Começamos estabelecendo uma bijeção entre os conjuntos  $P_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n, 4)$  e  $P_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m\left(n + 24m, 4, \lambda_4 \geq 6m + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor\right)$ . Seja  $\lambda \in P_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n, 4)$ . Acrescentando  $6m$  em cada uma das quatro partes de  $\lambda$ , obtemos uma partição de  $P_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m\left(n + 24m, 4, \lambda_4 \geq 6m + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor\right)$ . Reciprocamente, dada uma partição do último conjunto, retiramos  $6m$  de cada uma de suas partes e teremos uma partição de  $P_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n, 4)$ .

O restante da prova tem como objetivo mostrar que o número de partições do conjunto  $P_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n + 24m, 4)$  que não fazem parte da bijeção acima é um múltiplo de 2. Suponha  $m = 2l + 1$ , vamos mostrar que  $p_{\pm l}^m(n + 24m, 4, \lambda_4 \leq 5m + l + 1) \equiv 0 \pmod{2}$ . Dada uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in P_{\pm l}^m(n + 24m, 4, \lambda_4 \leq 5m + l + 1)$ , se  $\lambda_1 \equiv l + 1 \pmod{m}$ ,  $\lambda_2 \equiv l \pmod{m}$  e  $\lambda_3 \equiv l + 1 \pmod{m}$ , denotamos tal configuração por  $(l + 1, l, l + 1)$ . Assim temos as seguintes possibilidades para  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ :  $(l, l, l)$ ,  $(l, l, l + 1)$ ,  $(l, l + 1, l)$ ,  $(l + 1, l, l)$ ,  $(l, l + 1, l + 1)$ ,  $(l + 1, l, l + 1)$ ,  $(l + 1, l + 1, l)$  e  $(l + 1, l + 1, l + 1)$ ;

A seguir enumeramos as partições de acordo com o resíduo de  $n$  módulo  $m$  e os valores de  $\lambda_4$ , verificando as possibilidades listadas acima.

1.  $n = km + m - 2$  e  $\lambda_4 = l + mi$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Segue que a única configuração possível é  $(l, l, l)$ . Além disso,

$$p_{\pm l}^m(n + 24m, 4, \lambda_4 = l + mi) = \sum_{j=0}^5 p_{\leq 3}(k + 3 + 4j).$$

Agora pelo Lema 3.1 podemos agrupar de duas em duas certas partições contadas por  $p_{\leq 3}(k + 3 + 4j)$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , e como estamos interessados no números de partições módulo 2, podemos desprezar estes termos e considerar apenas as partições que não estão em bijeção. E novamente pelo Lema 3.1 o número de tais partições é dado por:

$$\begin{aligned} & \left\lfloor \frac{k + 22}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k + 23}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k + 14}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k + 15}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k + 6}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k + 7}{2} \right\rfloor + \\ & + \left\lfloor \frac{k + 19}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k + 11}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k + 3}{3} \right\rfloor + 6. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Afirmamos que a soma (3.22) é divisível por 2. De fato, analisando a soma de acordo com o resíduo de  $k$  módulo 2 e 3, temos

$k = 2q + r$ ;  $r \in \{0, 1\}$  e  $k = 3q' + r'$ ;  $r' \in \{0, 1, 2\}$ . Vejamos cada possibilidade:

- (i)  $r = r' = 0$ , então  $2 \mid k$  e  $3 \mid k$ , donde  $6 \mid k$ , escrevendo  $k = 6t$ , temos que a soma (denotaremos por  $s$ ) é dada por  $s = 6t + 10$ .

- (ii)  $r = 0, r' = 1$ , então  $q' = 2t + 1$ , donde  $s = 6q + 42 + 3q' + 11 \equiv 0 \pmod{2}$ , pois  $q'$  é ímpar.
  - (iii)  $r = 0, r' = 2$ , então  $q' = 2t$ , donde  $s = 6q + 42 + 3q' + 12 \equiv 0 \pmod{2}$ , pois  $q'$  é par.
  - (iv)  $r = 1, r' = 0$ , então  $q' = 2t + 1$ , donde  $s = 6q + 45 + 3q' + 10 \equiv 0 \pmod{2}$ , pois  $q'$  é ímpar.
  - (v)  $r = 1, r' = 1$ , então  $q' = 2t$ , segue que  $s = 6q + 45 + 3q' + 11 \equiv 0 \pmod{2}$ , pois  $q'$  é par.
  - (vi)  $r = 1, r' = 2$ , então  $q' = 2t + 1$ , logo  $s = 6q + 45 + 3q' + 12 \equiv 0 \pmod{2}$ , pois  $q'$  é ímpar.
2.  $n = km + 2$  e  $\lambda_4 = l + 1 + mi$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . A única configuração possível é  $(l + 1, l + 1, l + 1)$ .

$$p_{\pm l}^m(n + 24m, 4, \lambda_4 = l + 1 + mi) = \sum_{j=0}^5 p_{\leq 3}(k + 2 + 4j).$$

Logo,  $p_{\pm l}^m(n + 24m, 4, \lambda_4 = l + 1 + mi) \equiv 0 \pmod{2}$ , omitimos a prova pois é análoga ao Caso 1.

3.  $n = km$ , temos dois casos:

**Caso 1:**  $\lambda_4 = l + 1 + mi$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5$ . As configurações possíveis são  $(l, l, l + 1)$ ,  $(l, l + 1, l)$  e  $(l + 1, l, l)$ . Fixemos  $\lambda_4 = l + 1$  e estabelecemos uma bijeção entre o conjunto  $A$  formado por todas as partições de configuração  $(l, l + 1, l)$  onde  $\left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\lambda_3}{m} \right\rfloor$  e o conjunto  $B$  formado pelas partições com configuração  $(l, l, l + 1)$  em que  $\left\lfloor \frac{\mu_1}{m} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\mu_2}{m} \right\rfloor$  e  $\left\lfloor \frac{\mu_3}{m} \right\rfloor > 0$ . Com efeito, seja  $\lambda \in A$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1, l + 1 + \left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor, l + \left\lfloor \frac{\lambda_3}{m} \right\rfloor)$ , com  $\left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\lambda_3}{m} \right\rfloor$ . Logo,  $\mu = (\lambda_1, l + \left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor, l + 1 + \left\lfloor \frac{\lambda_3}{m} \right\rfloor) \in B$ , note que  $\left\lfloor \frac{\mu_3}{m} \right\rfloor > 0$ , pois  $\left\lfloor \frac{\lambda_3}{5} \right\rfloor > 0$ , uma vez que  $\lambda_3 \geq \lambda_4 = l + 1$ . Reciprocamente, dada uma partição  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in B$ , então  $(\mu_1, l + 1 + \left\lfloor \frac{\mu_2}{m} \right\rfloor, l + \left\lfloor \frac{\mu_3}{m} \right\rfloor) \in A$ . Agora enumeramos as partições em que  $n = km$ ,  $\lambda_4 = 3$  e configurações  $(l, l, l + 1)$  e  $(l, l + 1, l)$  que não estão em bijeção:

- (i)  $(l, l, l + 1)$  em que  $\left\lfloor \frac{\mu_1}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mu_2}{m} \right\rfloor$  ou  $\left\lfloor \frac{\mu_3}{m} \right\rfloor = 0$ :

$$2 \left\lfloor \frac{k + 20}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k + 20}{3} \right\rfloor + \begin{cases} 1, & \text{se } 2 \mid (k + 20), \\ 2, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Pois usamos o princípio da inclusão e exclusão nos conjuntos  $X = \{\text{partições em que } \lfloor \frac{\mu_1}{m} \rfloor = \lfloor \frac{\mu_2}{m} \rfloor\}$  e  $Y = \{\text{partições com } \lfloor \frac{\mu_3}{m} \rfloor = 0\}$ , onde

$$X \cap Y = \begin{cases} 1, & \text{se } 2 \mid (k+20), \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases};$$

$$X = \left\lfloor \frac{k+20}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k+20}{3} \right\rfloor + 1 \text{ e } Y = \left\lfloor \frac{k+20}{2} \right\rfloor + 1.$$

$$(ii) \ (l, l+1, l) \text{ e } \left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lambda_3}{m} \right\rfloor:$$

$$\left\lfloor \frac{k+18}{3} \right\rfloor + 1.$$

Para  $\lambda_4 = l+1+mi$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  o cálculo é análogo. Sendo assim, o número total de partições que não estão em bijeção para o caso  $n = km$ ,  $\lambda_4 = l+1+mi$ ,  $(l, l, l+1)$  e  $(l, l+1, l)$  é (desprezando o termos múltiplos de 2):

$$\sum_{j=0}^5 \left( \left\lfloor \frac{k-2+4j}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k+4j}{3} \right\rfloor \right). \quad (3.23)$$

Não é difícil concluir que o número de partições com configuração  $(l+1, l, l)$  para  $n = km$ ,  $\lambda_4 = l+1+mi$ ,  $i$  variando de 0 até 5 é dado por:

$$\sum_{j=0}^5 \left( p_{\leq 3}(k+2+4j) - \left\lfloor \frac{k+2+4j}{2} \right\rfloor \right) - 6. \quad (3.24)$$

**Caso 2:**  $\lambda_4 = l+mi$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5$ . As configurações possíveis são  $(l, l+1, l+1)$ ,  $(l+1, 1, l+1)$  e  $(l+1, l+1, l)$ . Seja  $C$  o conjunto formado por todas as partições com configuração  $(l, l+1, l+1)$  e  $\left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\lambda_3}{m} \right\rfloor$  e  $D$  o conjunto formado pelas partições de configuração  $(l+1, l, l+1)$  e  $\left\lfloor \frac{\lambda_1}{m} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor$ . Afirmamos que os conjuntos  $C$  e  $D$  estão em bijeção. A prova é análoga ao caso anterior. Resta enumerar

$$(i) \ \lambda_4 = l+mi, \ i \text{ variando de 0 a 5, configuração } (l, l+1, l+1) \text{ e } \left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lambda_3}{m} \right\rfloor:$$

$$\sum_{j=0}^5 \left\lfloor \frac{k+2+4j}{3} \right\rfloor. \quad (3.25)$$

$$(ii) \ \lambda_4 = l+mi, \ i \text{ variando de 0 a 5, configuração } (l+1, l, l+1) \text{ e } \left\lfloor \frac{\lambda_1}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor:$$

$$\sum_{j=0}^5 \left( \left\lfloor \frac{k+4j}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k+4j}{3} \right\rfloor \right) + 6. \quad (3.26)$$

(iii)  $\lambda_4 = l+mi$ ,  $i$  variando de 0 a 5, configuração  $(l+1, l+1, l)$ :

$$\sum_{j=0}^5 p_{\leq 3}(k+2+4j). \quad (3.27)$$

Finalmente, por (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6) temos que o total, já desprezando os termos divisíveis por 2, é dado por:

$$\sum_{j=0}^5 \left( \left\lfloor \frac{k+4j}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k-2+4j}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{k+2+4j}{3} \right\rceil - \left\lfloor \frac{k+2+4j}{2} \right\rfloor \right). \quad (3.28)$$

Para concluir que esta soma é divisível  $p$  basta fazer um cálculo análogo ao caso  $n \equiv m-2 \pmod{m}$ .

4.  $n = km + m - 1$ , temos dois casos:

**Caso 1:**  $\lambda_4 = l + mi$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5$ . As configurações possíveis são  $(l, l+1, l)$ ,  $(l, l, l+1)$  e  $(l+1, l, l)$ . Seja  $A$  o conjunto formado por todas as partições com configuração  $(l, l+1, l)$  e  $\left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\lambda_3}{m} \right\rfloor$  e  $B$  o conjunto formado pelas partições de configuração  $(l, l, l+1)$  e  $\left\lfloor \frac{\lambda_1}{m} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor$ . Afirmamos que os conjuntos  $C$  e  $D$  estão em bijeção. Omitiremos a prova, bem como das bijeções que forem referidas nos próximos casos. Precisamos contar o número de partições que não estão em bijeção:

(i)  $(l, l, l+1)$  em que  $\left\lfloor \frac{\lambda_1}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor$ :

$$\sum_{j=0}^5 \left( \left\lfloor \frac{k+3+4j}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k+4(j+1)}{3} \right\rfloor \right) + 6. \quad (3.29)$$

(ii)  $(l, l+1, l)$  em que  $\left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lambda_3}{m} \right\rfloor$ :

$$\sum_{j=0}^5 \left\lfloor \frac{k+3+4j}{3} \right\rfloor. \quad (3.30)$$

(iii)  $(l+1, l, l)$ :

$$\sum_{j=0}^5 p_{\leq 3}(k+3+4j). \quad (3.31)$$

**Caso 2:**  $\lambda_4 = l+1+mi$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5$ . Temos apenas a configuração  $(l, l, l)$ :

$$\sum_{j=0}^5 \left( p_{\leq 3}(k+3+4j) - \left\lfloor \frac{k+3+4j}{2} \right\rfloor - 1 \right). \quad (3.32)$$

Logo, precisamos avaliar apenas  $\sum_{j=0}^5 \left( \left\lfloor \frac{k+3+4j}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k+4(j+1)}{3} \right\rfloor \right)$ , que pode ser feito verificando os resíduos de  $n$  módulo 3, e em qualquer caso o valor da soma é  $-2$ .

5.  $n = km + 1$ , temos dois casos:

**Caso 1:**  $\lambda_4 = l + mi$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5$ . A única configuração possível é  $(l + 1, l + 1, l + 1)$ :

$$\sum_{j=0}^5 p_{\leq 3}(k + 2 + 4j). \quad (3.33)$$

**Caso 2:**  $\lambda_4 = l + 1 + mi$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5$ . As configurações possíveis são:  $(l, l + 1, l + 1)$ ,  $(l + 1, l, l + 1)$ ,  $(l + 1, l + 1, l)$ . Seja  $G$  o conjunto formado por todas as partições com configuração  $(l, l + 1, l + 1)$  e  $\left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\lambda_3}{m} \right\rfloor$  e  $H$  o conjunto formado pelas partições de configuração  $(l + 1, l, l + 1)$  e  $\left\lfloor \frac{\lambda_1}{m} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor$ . Afirmamos que os conjuntos  $G$  e  $H$  estão em bijeção. Resta enumerar

(i)  $\lambda_4 = l + 1 + mi$ ,  $i$  variando de 0 a 5, configuração  $(l, l + 1, l + 1)$  e  $\left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lambda_3}{m} \right\rfloor$ :

$$\sum_{j=0}^5 \left\lfloor \frac{k + 2 + 4j}{3} \right\rfloor. \quad (3.34)$$

(ii)  $\lambda_4 = l + 1 + mi$ ,  $i$  variando de 0 a 5, configuração  $(l + 1, l, l + 1)$  e  $\left\lfloor \frac{\lambda_1}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lambda_2}{m} \right\rfloor$ :

$$\sum_{j=0}^5 \left( \left\lfloor \frac{k + 4j}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k + 4j}{3} \right\rfloor \right) + 6. \quad (3.35)$$

(iii)  $\lambda_4 = l + 1 + mi$ ,  $i$  variando de 0 a 5, configuração  $(l + 1, l + 1, l)$ :

$$\sum_{j=0}^5 \left( p_{\leq 3}(k + 2 + 4j) - \left\lfloor \frac{k + 2 + 4j}{2} \right\rfloor - 1 \right). \quad (3.36)$$

Portanto, basta calcular

$$\sum_{j=0}^5 \left( \left\lfloor \frac{k + 4j}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k + 2 + 4j}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k + 4j}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k + 2 + 4j}{2} \right\rfloor \right), \quad (3.37)$$

que pode ser feito avaliando os resíduos de  $m$  por 2 e 3, e em todos os casos o somatório é um múltiplo de  $p$ .

Para qualquer outro resíduo de  $n$  módulo  $m$ , temos que  $p_{\pm l}^m(n + 24m, 4, \lambda_4 \leq 5m + l + 1) = 0$ , o que conclui a prova para o caso  $m$  ímpar. A demonstração para o caso em que  $m$  é par, digamos,  $m = 2l$ , pode ser vista como um caso particular da prova acima, pois  $\lambda_i \equiv l \pmod{m}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .  $\square$

**Teorema 3.9.** Para  $n \geq 4$ ,

$$p_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n, 4) \equiv p_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n + 36m, 4) \pmod{3}.$$

*Demonstração.* Primeiramente, estabelecemos uma bijeção entre os conjuntos  $P_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n, 4)$  e  $P_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 \geq 9m + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$ . Seja  $\lambda \in P_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n, 4)$ . Somando  $9m$  em cada uma das quatro partes de  $\lambda$ , temos uma partição de  $P_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n + 24m, 4, \lambda_4 \geq 9m + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$ . Reciprocamente, dada uma partição do último conjunto, retiramos  $9m$  de cada uma de suas partes e teremos uma partição de  $P_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n, 4)$ .

Suponha  $m = 2l + 1$ , vamos mostrar que  $p_{\pm l}^m(n + 24m, 4, \lambda_4 \leq 8m + l + 1) \equiv 0 \pmod{2}$ . Usaremos a mesma notação de configuração utilizada no teorema anterior. A seguir enumeramos as partições de acordo com o resíduo de  $n$  módulo  $m$  e os valores de  $\lambda_4$ , verificando as possibilidades listadas acima.

1.  $n = km + m - 2$  e  $\lambda_4 = l + mi$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 8$ . Logo, a única configuração possível é  $(l, l, l)$ . Além disso,

$$p_{\pm l}^m(n + 24m, 4, \lambda_4 = l + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k + 3 + 4j) = \sum_{j=0}^8 \sum_{\theta=1}^3 p(k + 3 + 4j, \theta).$$

Mas,

$$\sum_{j=0}^8 p(k + 3 + 4j, 1) = 9$$

e

$$\sum_{j=0}^8 p(k + 3 + 4j, 2) = \begin{cases} 9(t + 9), & \text{se } k = 2t, \\ 9(t + 10), & \text{se } k = 2t + 1. \end{cases}$$

Agora, pelo Teorema 2.11 temos que  $\{p(n, 3) \pmod{p}\}_{n \geq 3}$  tem período 18, o que nos permite calcular  $\sum_{j=0}^8 p(k + 3 + 4j, 3)$ . Por exemplo, se  $k + 3 = 18t$  então  $\sum_{j=0}^8 p(k + 3 + 4j, 3) \equiv 270 \pmod{3}$  (utilizamos o software *Mathematica* para os cálculos). Prosseguindo desta forma, calculamos os casos restantes, ou seja,  $k + 3 = 18t + r$ ,  $r = 1, \dots, 17$  e vemos que  $\sum_{j=0}^8 p(k + 3 + 4j, 3)$  é divisível por 3 para qualquer valor de  $r$ .

2.  $n = km + 2$  e  $\lambda_4 = l + 1 + mi$ ,  $i = 0, 1, \dots, 8$ . A única configuração possível é  $(l + 1, l + 1, l + 1)$ .

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + 1 + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k + 2 + 4j).$$

Logo,  $p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + 1 + mi) \equiv 0 \pmod{3}$ , omitimos a prova (bem como dos casos a seguir) pois é análoga ao Caso 1.

3.  $n = km$ . Temos dois casos:

**Caso 1:**  $\lambda_4 = l + 1 + mi$ ,  $i = 0, 1, \dots, 8$ . As configurações possíveis são  $(l, l, l + 1)$ ,  $(l, l + 1, l)$  e  $(l + 1, l, l)$ .

(i)  $(l, l, l + 1)$  :

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + 1 + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k + 4j).$$

(ii)  $(l, l + 1, l)$  :

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + 1 + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k - 2 + 4j).$$

(iii)  $(l + 1, l, l)$  :

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + 1 + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k - 1 + 4j).$$

E os três somatórios são divisíveis por 3.

**Caso 2:**  $\lambda_4 = l + mi$ ,  $i = 0, 1, \dots, 8$ . As configurações possíveis são  $(l, l + 1, l + 1)$ ,  $(l + 1, 1, l + 1)$  e  $(l + 1, l + 1, l)$ .

(i)  $(l, l + 1, l + 1)$ :

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k + 1 + 4j). \quad (3.38)$$

(ii)  $(l + 1, l, l + 1)$ :

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k - 1 + 4j). \quad (3.39)$$

(iii)  $(l + 1, l + 1, l)$ :

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k + 2 + 4j). \quad (3.40)$$

Analogamente, mostra-se que (3.17), (3.18) e (3.19) são divisíveis por 3.

4.  $n = km + m - 1$ . Temos dois casos:

**Caso 1:**  $\lambda_4 = l + mi$ ,  $i = 0, 1, \dots, 8$ . As configurações possíveis são:

(i)  $(l, l, l + 1)$ :

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k + 1 + 4j). \quad (3.41)$$

(ii)  $(l, l + 1, l)$ :

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k + 2 + 4j). \quad (3.42)$$

(iii)  $(l + 1, l, l)$ :

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k + 3 + 4j). \quad (3.43)$$

**Caso 2:**  $\lambda_4 = l + 1 + mi$ ,  $i = 0, 1, \dots, 8$ . Temos apenas a configuração  $(l, l, l)$ :

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + 1 + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k + 4j). \quad (3.44)$$

5.  $n = km + 1$ . Temos dois casos:

**Caso 1:**  $\lambda_4 = l + mi$ ,  $i = 0, 1, \dots, 8$ . A única configuração possível é  $(l + 1, l + 1, l + 1)$ :

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k + 2 + 4j). \quad (3.45)$$

**Caso 2:**  $\lambda_4 = l + 1 + mi$ ,  $i = 0, 1, \dots, 8$ . As configurações possíveis são:

(i)  $(l, l + 1, l + 1)$  :

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + 1 + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k + 1 + 4j). \quad (3.46)$$

(ii)  $(l + 1, l, l + 1)$  :

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + 1 + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k + 4j). \quad (3.47)$$

(iii)  $(l + 1, l + 1, l)$ :

$$p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 = l + 1 + mi) = \sum_{j=0}^8 p_{\leq 3}(k - 1 + 4j). \quad (3.48)$$

Prova-se de maneira análoga que as somas de (3.20) a (3.27) são todas divisíveis por 3. Além disso, para qualquer outro resíduo de  $n$  módulo  $m$ , temos que  $p_{\pm l}^m(n + 36m, 4, \lambda_4 \leq 8m + l + 1) = 0$ , o que conclui a prova para o caso  $m$  ímpar. O caso em que  $m$  é par, digamos,  $m = 2l$ , pode ser demonstrado de maneira análoga, pois  $\lambda_i \equiv l \pmod{m}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .  $\square$

**Teorema 3.10.** *Sejam  $m \geq 3$  um inteiro e  $p \geq 3$  ímpar. A sequência  $\{p_{\pm 1}^m(n, 2) \pmod{p}\}_{n \geq 2(m-1)}$  tem período  $2mp$ .*

*Demonstração.* Afirmamos que  $P_{\pm 1}^m(n, 2)$  está em bijeção com  $P_{\pm 1}^m(n + 2mp, 2, \lambda_2 \geq 1 + mp)$ . Com efeito, dada uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in P_{\pm 1}^m(n, 2)$ , temos que  $\lambda' = (\lambda_1 + mp, \lambda_2 + mp) \in P_{\pm 1}^m(n + 2mp, 2, \lambda_2 \geq 1 + mp)$ . Além disso, a operação é invertível, garantindo a bijeção. A seguir enumeramos as partições de  $P_{\pm 1}^m(n + 2mp, 2)$  que não estão em bijeção, ou seja,  $P_{\pm l}^m(n + 2mp, 2, \lambda_2 \leq 1 + mp - m + m - 2) = P_{\pm 1}^m(n + 2mp, 2, \lambda_2 \leq mp - 1)$ . Denotaremos este último conjunto por  $A$ . Listamos as partições do conjunto  $A$  de acordo com o valor de  $\lambda_2$ :

$\lambda_2 = 1 : \lambda_1 = n + 2mp - 1$ , então  $(\lambda_1, \lambda_2) \in A$  se, e somente se,  $n \equiv 2, 0(\text{mod } m)$ ;

$\lambda_2 = m - 1 : \lambda_1 = n + 2mp - m + 1$ , segue que  $(\lambda_1, \lambda_2) \in A$  se, e somente se,  
 $n \equiv m - 2, 0(\text{mod } m)$ ;

$\lambda_2 = 1 + m : \lambda_1 = n + 2mp - 1 - m$ , então  $(\lambda_1, \lambda_2) \in A$  se, e somente se,  $n \equiv 2, 0(\text{mod } m)$ ;

$\lambda_2 = 2m - 1 : \lambda_1 = n + 2mp - 2m + 1$ , então  $(\lambda_1, \lambda_2) \in A$  se, e somente se,  
 $n \equiv m - 2, 0(\text{mod } m)$ ;

$\vdots$

$\lambda_2 = mp + 1 - m : \lambda_1 = n + 2mp - (mp + 1 - m)$ , então  $(\lambda_1, \lambda_2) \in A$  se, e somente se,  
 $n \equiv 2, 0(\text{mod } m)$ ;

$\lambda_2 = mp - 1 : \lambda_1 = n + mp + 1$ , então  $(\lambda_1, \lambda_2) \in A$  se, e somente se,  $n \equiv m - 2, 0(\text{mod } m)$ .

Portanto, se  $n \equiv 2, m - 2(\text{mod } m)$  então  $|A| = p$ , e se  $n \equiv 0(\text{mod } m)$  então  $|A| = 2p$ . E para  $n \not\equiv 2, m - 2, 0(\text{mod } m)$ , temos que  $|A| = 0$ .  $\square$

**Teorema 3.11.** *Sejam  $m \geq 3$  um inteiro e  $p \geq 3$  ímpar. A sequência  $\{p_{\pm 1}^m(n, 3)(\text{mod } p)\}_{n \geq 3(m-1)}$  tem período  $6mp$ .*

*Demonstração.* Afirmamos que  $p_{\pm 1}^m(n, 3) = p_{\pm 1}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \geq 2mp + 1)$ . Com efeito, considere uma partição contada por  $p_{\pm 1}^m(n, 3)$ . Adicionando-se  $2mp$  em cada parte obtemos uma partição contada por  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \geq 2mp + 1)$ . Reciprocamente, subtraindo-se  $2mp$  de cada parte de uma partição enumerada por  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \geq 2mp + 1)$  obtemos uma partição contada por  $p_{\pm 1}^m(n, 3)$ .

O restante da demonstração consiste em provar que  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \leq 2mp - 1)$  é divisível por  $p$ . A seguir enumeramos as partições contadas por  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \leq 2mp - 1)$  de acordo com os valores de  $\lambda_3$  e verificando todas as configurações possíveis para  $\lambda_1, \lambda_2$ .

- $\lambda_3 = 1$ . Queremos encontrar  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\pm 1}^m(n + 6mp - 1, 2)$ , de acordo com as possíveis configurações:

1.  $(1, 1)$ , então  $n \equiv 3 (\text{mod } m)$ ,  $n = 3 + qm$ , logo  $n + 6mp - 1 = m(q + 6p) + 2$ . Assim, toda partição do conjunto  $P_{\pm 1}^m(n + 6mp - 1, 2)$  é formada por 1 em cada parte mais  $(q + 6p)$  números  $m$  distribuídos de modo que  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , ou seja,  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp - 1, 2) = p_{\leq 2}(q + 6p)$ . As próximas análises são análogas, sendo assim, omitiremos os argumentos.
2.  $(1, m - 1)$ , então  $n \equiv 1 (\text{mod } m)$ ,  $n = 1 + qm$ , segue que  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp - 1, 2) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;

3.  $(m-1, m-1)$ , então  $n \equiv (m-1) \pmod{m}$ ,  $n = m-1 + qm$ , donde  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp - 1, 2) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;
  4.  $(m-1, 1)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{m}$ ,  $n = 1 + qm$ , logo  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp - 1, 2) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ .
- $\lambda_3 = m-1$ . Queremos encontrar  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 = m-1) = p_{\pm 1}^m(n + 6mp + 1 - m, 2, \lambda_2 \geq m-1)$ , vejamos as quatro possibilidades para  $\lambda_1, \lambda_2$ :
    1.  $(1, 1)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{m}$ ,  $n = 1 + qm$ , donde  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp + 1 - m, 2, \lambda_2 \geq m-1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
    2.  $(1, m-1)$  implica que  $n \equiv (m-1) \pmod{m}$ ,  $n = m-1 + qm$ , logo  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp + 1 - m, 2, \lambda_2 \geq m-1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;
    3.  $(m-1, 1)$ , segue que  $n \equiv (m-1) \pmod{m}$ ,  $n = m-1 + qm$ , logo  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp + 1 - m, 2, \lambda_2 \geq m-1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
    4.  $(1, 1)$ , então  $n \equiv (m-3) \pmod{m}$ ,  $n = m-3 + qm$ , portanto  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp + 1 - m, 2, \lambda_2 \geq m-1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ .

Para os próximos valores de  $\lambda_3$ , basta observarmos que quando  $\lambda_3$  aumenta  $m$  unidades, temos que a quantidade de  $m$ 's que podem ser distribuídos entre as duas primeiras partes decresce três unidades, pois necessita ser utilizado um  $m$  em cada parte afim de garantir que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ . Por exemplo,  $\lambda_3 = m+1$ , configuração  $(1, 1)$ , então  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 = m+1) = p_{\pm 1}^m(n + 6mp - m - 1, 2, \lambda_2 \geq m+1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ .

Considerando os itens acima, vemos que se  $n \not\equiv 1, 3, m-1, m-3 \pmod{m}$  então  $p_{\pm 1}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \leq 2mp - 1) = 0$ . Para os outros resíduos de  $n$  módulo  $m$  temos:

$$(i) \ n = 1 + qm : p_{\pm 1}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \leq 2mp - 1) =$$

$$\sum_{i=0}^{2p-1} (p_{\leq 2}(q + 2 + 3i) + p_{\leq 2}(q + 1 + 3i) + p_{\leq 2}(q + 3i));$$

$$(ii) \ n = 3 + qm : p_{\pm 1}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \leq 2mp - 1) =$$

$$\sum_{i=0}^{2p-1} (p_{\leq 2}(q + 3 + 3i));$$

$$(iii) \ n = m-1 + qm : p_{\pm 1}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \leq 2mp - 1) =$$

$$\sum_{i=0}^{2p-1} (2p_{\leq 2}(q + 2 + 3i) + (p_{\leq 2}(q + 1 + 3i)));$$

$$(iv) \ n = m-3 + qm : p_{\pm 1}^m(n + 6mp, 3, \lambda_3 \leq 2mp - 1) =$$

$$\sum_{i=0}^{2p-1} (p_{\leq 2}(q + 3 + 3i)).$$



Mas  $p_{\leq 2}(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ . Logo é suficiente mostrarmos que cada uma das somas

$$\sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+3+3i)}{2} \right\rfloor, \sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+2+3i)}{2} \right\rfloor, \sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+1+3i)}{2} \right\rfloor, \sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+3i)}{2} \right\rfloor$$

é divisível por  $p$ . Separamos em dois casos:

(a) Se  $q$  é par,  $q = 2k$ , então

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+3+3i)}{2} \right\rfloor &= p(3p+2k+1), \quad \sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+2+3i)}{2} \right\rfloor = p(3p+2k), \\ \sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+1+3i)}{2} \right\rfloor &= p(3p+2k-1), \quad \sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+3i)}{2} \right\rfloor = p(3p+2k-2). \end{aligned}$$

(b) Se  $q$  é ímpar,  $q = 2k+1$ , então

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+3+3i)}{2} \right\rfloor &= p(3p+2k+2), \quad \sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+2+3i)}{2} \right\rfloor = p(3p+2k+1), \\ \sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+1+3i)}{2} \right\rfloor &= p(3p+2k), \quad \sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+3i)}{2} \right\rfloor = p(3p+2k-1). \end{aligned}$$

□

### 3.3 Partições com partes congruentes a 3, 4 ou 5 módulo 8

Seja  $b(n)$  o número de partições de  $n$  cujas partes são congruentes a 3, 4 ou 5 módulo 8. Lucy Slater [52] estabeleceu a seguinte identidade:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_n q^{n^2+2n}}{(q^2; q^2)_n} = \prod_{\substack{n=1 \\ n \equiv 3,4,5 \pmod{8}}}^{\infty} \frac{1}{1-q^n},$$

que posteriormente tornou-se conhecida como uma das identidades de Göllnitz-Gordon [28, 29]. Para outras interpretações veja [5].

A seguir apresentamos resultados para esta função sujeita a restrição quanto ao número de partes. Denotaremos por  $b(n, k)$ , a função  $b(n)$  em exatamente  $k$  partes.

**Teorema 3.12.** *Seja  $p \geq 3$  ímpar. Então,  $b(n, 2) \equiv b(n+16p, 2) \pmod{p}$ .*

*Demonstração.* Temos que

$$b(n, 2) = b(n+16p, 2, \lambda_2 \geq 8p+3).$$

De fato, se  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  é uma partição enumerada por  $b(n, 2)$ , então  $\lambda' = (\lambda_1 + 8p, \lambda_2 + 8p)$  é uma partição enumerada por  $b(n + 16p, 2, \lambda_2 \geq 8p + 3)$ , pois  $\lambda_i + 8p \equiv 3, 4, 5 \pmod{8}$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Reciprocamente, subtraindo  $8p$  de cada parte de uma partição enumerada por  $b(n + 16p, 2, \lambda_2 \geq 8p + 3)$ , obtemos uma partição enumerada por  $b(n, 2)$ . Basta mostrarmos que  $b(n + 16p, 2, \lambda_2 \leq 8p - 3) \equiv 0 \pmod{p}$ . Temos que

$$\begin{aligned} b(n + 16p, 2, \lambda_2 \leq 8p - 3) &= \sum_{i=3}^{8p-5} b(n + 16p, 2, \lambda_2 = i) \\ &\quad + \sum_{j=4}^{8p-4} b(n + 16p, 2, \lambda_2 = j) \\ &\quad + \sum_{k=5}^{8p-3} b(n + 16p, 2, \lambda_2 = k), \end{aligned}$$

com  $i \equiv 3 \pmod{8}$ ,  $j \equiv 4 \pmod{8}$  e  $k \equiv 5 \pmod{p}$ . Se  $\lambda_2 = i$ , com  $i \equiv 3 \pmod{8}$  e  $3 \leq i \leq 8p - 5$ , então  $\lambda_1 = n + 16p - i$ . Mas, temos  $\lambda_1 = n + 16p - i \equiv 3, 4, 5 \pmod{8}$ , ou seja,  $n \equiv 3 + i, 4 + i, 5 + i \pmod{8}$ , logo, para cada  $i$ , temos 3 partições enumeradas por  $b(n + 16p, 2, \lambda_2 = i)$  e, portanto,  $\sum_{i=3}^{8p-5} b(n + 16p, 2, \lambda_2 = i) = 3p$ . De maneira análoga, mostra-se que  $\sum_{j=4}^{8p-4} b(n + 16p, 2, \lambda_2 = j) = \sum_{k=5}^{8p-3} b(n + 16p, 2, \lambda_2 = k) = 3p$  e daí concluímos que  $b(n + 16p, 2, \lambda_2 \leq 8p - 3) \equiv 9p \equiv 0 \pmod{p}$ .  $\square$

**Teorema 3.13.** *Sejam  $p \geq 3$  ímpar e  $n \geq 9$  um inteiro. Então,  $b(n, 3) \equiv b(n + 48p, 3) \pmod{p}$ .*

*Demonstração.* Primeiramente mostramos que  $b(n, 3) = b(n + 48p, 3, \lambda_3 \geq 16p + 3)$ . Dada uma partição contada por  $b(n, 3)$ , adicionando-se  $16p$  em cada parte obtemos uma partição contada por  $b(n + 48p, \lambda_3 \geq 16p + 3)$ . Reciprocamente, dada uma partição contada por  $b(n + 48p, \lambda_3 \geq 16p + 3)$  subtraindo-se  $16p$  de cada parte obtemos uma partição contada por  $b(n, 3)$ .

Para concluirmos a prova precisamos mostrar que  $b(n + 48p, 3, \lambda_3 \leq 16p - 3)$  é divisível por  $p$ . Para cada  $\lambda_3$  temos nove configurações possíveis para  $\lambda_1, \lambda_2$ , a saber:  $(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)$ . A seguir analisamos todas essas possibilidades para  $\lambda_3 = 3, 4, 5$ , pois os outros casos serão análogos uma vez que  $\lambda_3 \equiv 3, 4, 5 \pmod{p}$ . Sempre que o contexto estiver claro em cada análise, quando nos referirmos a função  $b(n, 2)$  estaremos contando apenas as partições que possuem a configuração específica que está sendo enumerada, ou seja, usamos a mesma notação  $b(n, 2)$  para as partições sujeitas a dada configuração. Assim, no Item 1 a seguir,  $b(n + 48p - 3, 2)$  enumera apenas as partições com configuração  $(3, 3)$ .

- $\lambda_3 = 3$

1.  $(3, 3)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{8}$ , escreva  $n = 1 + 8m$ . Afirmamos que

$$b(n + 48p - 3, 2) = p_{\leq 2}(m + 6p - 1).$$

Com efeito,  $n + 48p - 3 = 8m + 48p - 2 = 8(m + 6p - 1) + 6$  e, assim, para formarmos uma partição contada por  $b(n + 48p - 3, 2)$ , acrescentamos 3 em cada parte e os  $m + 6p - 1$  números 8 devem ser distribuídos em no máximo duas partes, logo  $b(n + 48p - 3, 2) = p_{\leq 2}(m + 6p - 1)$ .

2.  $(4, 4)$ , então  $n \equiv 3 \pmod{8}$ , escreva  $n = 3 + 8m$ , logo

$$b(n + 48p - 3, 2) = p_{\leq 2}(m + 6p - 1);$$

3.  $(5, 5)$ , então  $n \equiv 5 \pmod{8}$ , escreva  $n = 5 + 8m$ , segue que

$$b(n + 48p - 3, 2) = p_{\leq 2}(m + 6p - 1);$$

4.  $(3, 4)$  e  $(4, 3)$ , então  $n \equiv 2 \pmod{8}$ , escreva  $n = 2 + 8m$ . Afirmamos que as partições com configuração  $(3, 4)$  estão em bijeção com as partições de configuração  $(4, 3)$  onde  $\left\lfloor \frac{\lambda_1}{8} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\lambda_2}{8} \right\rfloor$ . Seja uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  de formato  $(3, 4)$ ,  $\lambda = \left(3 + \left\lfloor \frac{\lambda_1}{8} \right\rfloor, 4 + \left\lfloor \frac{\lambda_2}{8} \right\rfloor\right)$ . Então  $\mu = \left(4 + \left\lfloor \frac{\lambda_1}{8} \right\rfloor, 3 + \left\lfloor \frac{\lambda_2}{8} \right\rfloor\right)$  tem formato  $(4, 3)$  e  $\left\lfloor \frac{\mu_1}{8} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\mu_2}{8} \right\rfloor$ . Reciprocamente, seja  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$  uma partição com formato  $(4, 3)$  e  $\left\lfloor \frac{\mu_1}{8} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\mu_2}{8} \right\rfloor$ ,  $\mu = \left(4 + \left\lfloor \frac{\mu_1}{8} \right\rfloor, 3 + \left\lfloor \frac{\mu_2}{8} \right\rfloor\right)$ . Então  $\lambda = \left(3 + \left\lfloor \frac{\mu_1}{8} \right\rfloor, 4 + \left\lfloor \frac{\mu_2}{8} \right\rfloor\right)$  é uma partição de formato  $(3, 4)$ . Além disso, o número total de partições de configuração  $(4, 3)$  e  $\left\lfloor \frac{\lambda_1}{8} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\lambda_2}{8} \right\rfloor$  é igual a

$$\begin{cases} p_{\leq 2}(m + 6p - 1) - 1, & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 1) \\ p_{\leq 2}(m + 6p - 1), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Se  $2 \mid (m + 6p - 1)$ , existe apenas uma partição de configuração  $(4, 3)$  que não faz parte da bijeção acima e, quando  $2 \nmid (m + 6p - 1)$ , todas as partições de formato  $(4, 3)$  fazem parte da bijeção. Portanto,

$$b(n + 48p - 3, 2) = \begin{cases} 2p_{\leq 2}(m + 6p - 1) - 1, & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 1) \\ 2p_{\leq 2}(m + 6p - 1), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

5.  $(3, 5)$  e  $(5, 3)$ , então  $n \equiv 3 \pmod{8}$ , escreva  $n = 3 + 8m$ . De maneira análoga ao caso anterior, temos

$$b(n + 48p - 3, 2) = \begin{cases} 2p_{\leq 2}(m + 6p - 1) - 1, & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 1) \\ 2p_{\leq 2}(m + 6p - 1), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

6.  $(4, 5)$  e  $(5, 4)$ , então  $n \equiv 4 \pmod{8}$ , escreva  $n = 4 + 8m$ . Então,

$$b(n + 48p - 3, 2) = \begin{cases} 2p_{\leq 2}(m + 6p - 1) - 1, & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 1) \\ 2p_{\leq 2}(m + 6p - 1), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 4$ :

1.  $(3, 3)$ , então  $n \equiv 2 \pmod{8}$ , escreva  $n = 2 + 8m$ . Logo

$$b(n + 48p - 4, 2, \lambda_2 \geq 8) = p_{\leq 2}(m + 6p - 3);$$

2.  $(4, 4)$ , então  $n \equiv 4 \pmod{8}$ , escreva  $n = 4 + 8m$ . Logo

$$b(n + 48p - 4, 2) = p_{\leq 2}(m + 6p - 1);$$

3.  $(5, 5)$ , então  $n \equiv 6 \pmod{8}$ , escreva  $n = 6 + 8m$ . Segue que

$$b(n + 48p - 4, 2) = p_{\leq 2}(m + 6p - 1);$$

4.  $(3, 4)$  e  $(4, 3)$ , então  $n \equiv 3 \pmod{8}$ , escreva  $n = 3 + 8m$ . As partições de configuração  $(3, 4)$  em que  $\left\lfloor \frac{\lambda_2}{8} \right\rfloor \geq 1$  estão em bijeção com as partições de configuração  $(4, 3)$  onde  $\left\lfloor \frac{\lambda_1}{8} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\lambda_2}{8} \right\rfloor$ . Portanto,

$$b(n + 48p - 4, 2) = \begin{cases} 2p_{\leq 2}(m + 6p - 3), & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 3) \\ 2p_{\leq 2}(m + 6p - 3) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

5.  $(3, 5)$  e  $(5, 3)$ , então  $n \equiv 4 \pmod{8}$ , escreva  $n = 4 + 8m$ . A bijeção é idêntica ao caso anterior. Logo

$$b(n + 48p - 4, 2) = \begin{cases} 2p_{\leq 2}(m + 6p - 3), & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 3) \\ 2p_{\leq 2}(m + 6p - 3) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

6.  $(4, 5)$  e  $(5, 4)$ , então  $n \equiv 5 \pmod{8}$ , escreva  $n = 5 + 8m$ . Então,

$$b(n + 48p - 4, 2) = \begin{cases} 2p_{\leq 2}(m + 6p - 1) - 1, & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 1) \\ 2p_{\leq 2}(m + 6p - 1), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 5$

1.  $(3, 3)$ , então  $n \equiv 3 \pmod{8}$ , escreva  $n = 3 + 8m$ . Logo

$$b(n + 48p - 5, 2, \lambda_2 \geq 8) = p_{\leq 2}(m + 6p - 3);$$

2.  $(4, 4)$ , então  $n \equiv 5 \pmod{8}$ , escreva  $n = 5 + 8m$ . Onde

$$b(n + 48p - 5, 2) = p_{\leq 2}(m + 6p - 3)$$

3.  $(5, 5)$   $n \equiv 7 \pmod{8}$ , escreva  $n = 7 + 8m$ . Segue que

$$b(n + 48p - 5, 2) = p_{\leq 2}(m + 6p - 1);$$

4.  $(3, 4)$  e  $(4, 3)$ , então  $n \equiv 4 \pmod{8}$ , escreva  $n = 4 + 8m$ . As partições com configuração  $(3, 4)$  estão em bijeção com as partições de configuração  $(4, 3)$  em que  $\left\lfloor \frac{\lambda_1}{8} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\lambda_2}{8} \right\rfloor$ . E o número de partições destas últimas é dado por:

$$\begin{cases} p_{\leq 2}(m + 6p - 3) - 1, & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 3) \\ p_{\leq 2}(m + 6p - 3), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

pois  $n + 48p - 5 = 8(m + 6p - 1) + 7$  mas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  obrigatoriamente são maiores do que 5. Desta forma, dos  $m + 6p - 1$  números 8 que poderiam ser distribuídos para as duas partes, sobram  $m + 6p - 3$ . Assim, o número total de partições com as configurações  $(3, 4)$  e  $(4, 3)$ ,  $b(n + 48p - 5, 3, \lambda_3 = 5)$ , é igual a

$$b(n + 48p - 5, 2) = \begin{cases} 2p_{\leq 2}(m + 6p - 3) - 1, & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 3) \\ 2p_{\leq 2}(m + 6p - 3), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

5.  $(3, 5)$  e  $(5, 3)$ , então  $n \equiv 5 \pmod{8}$ , escreva  $n = 5 + 8m$ . Temos bijeção entre  $(3, 5)$  em que  $\left\lfloor \frac{\lambda_2}{8} \right\rfloor \geq 1$  e as partições com configuração  $(5, 3)$  em que  $\left\lfloor \frac{\lambda_1}{8} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{\lambda_2}{8} \right\rfloor$ . Claramente temos apenas uma partição de configuração  $(3, 5)$  que não está em bijeção. Logo, basta somarmos 1 em cada valor do caso anterior, ou seja,

$$b(n + 48p - 5, 2) = \begin{cases} 2p_{\leq 2}(m + 6p - 3), & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 3) \\ 2p_{\leq 2}(m + 6p - 3) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

6.  $(4, 5)$  e  $(5, 4)$ ,  $n \equiv 6 \pmod{8}$ , escreva  $n = 6 + 8m$ . É análogo ao caso anterior. Logo

$$b(n + 48p - 5, 2) = \begin{cases} 2p_{\leq 2}(m + 6p - 3), & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 3) \\ 2p_{\leq 2}(m + 6p - 3) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pela análise acima, podemos notar que para  $n \equiv 0 \pmod{8}$  temos que  $b(n + 48p, 3, \lambda_3 = 3, 4, 5) = 0$ , e para os outros resíduos de  $n$  módulo 8, temos:

- (i)  $n = 1 + 8m$  segue que  $b(n + 48p, 3, \lambda_3 = 3, 4, 5) = p_{\leq 2}(m + 6p - 1)$ ;
- (ii)  $n = 2 + 8m$ , então  $b(n + 48p, 3, \lambda_3 = 3, 4, 5) =$   

$$= \begin{cases} 2p_{\leq 2}(m + 6p - 1) + p_{\leq 2}(m + 6p - 3) - 1, & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 1) \\ 2p_{\leq 2}(m + 6p - 1) + p_{\leq 2}(m + 6p - 3), & \text{caso contrário} \end{cases}$$
- (iii)  $n = 3 + 8m$ , segue que  $b(n + 48p, 3, \lambda_3 = 3, 4, 5) =$   

$$= \begin{cases} 3(p_{\leq 2}(m + 6p - 1) + p_{\leq 2}(m + 6p - 3)) - 1, & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 1) \\ 3(p_{\leq 2}(m + 6p - 1) + p_{\leq 2}(m + 6p - 3)) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
- (iv)  $n = 4 + 8m$ , então  $b(n + 48p, 3, \lambda_3 = 3, 4, 5) =$   

$$= \begin{cases} 3p_{\leq 2}(m + 6p - 1) + 4p_{\leq 2}(m + 6p - 3) - 2, & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 1) \\ 3p_{\leq 2}(m + 6p - 1) + 4p_{\leq 2}(m + 6p - 3) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
- (v)  $n = 5 + 8m$ , então  $b(n + 48p, 3, \lambda_3 = 3, 4, 5) =$   

$$= \begin{cases} 3(p_{\leq 2}(m + 6p - 1) + p_{\leq 2}(m + 6p - 3)) - 1, & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 1) \\ 3(p_{\leq 2}(m + 6p - 1) + p_{\leq 2}(m + 6p - 3)) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
- (vi)  $n = 6 + 8m$ , então  $b(n + 48p, 3, \lambda_3 = 3, 4, 5) =$   

$$= \begin{cases} p_{\leq 2}(m + 6p - 1) + 2p_{\leq 2}(m + 6p - 3), & \text{se } 2 \mid (m + 6p - 3) \\ p_{\leq 2}(m + 6p - 1) + 2p_{\leq 2}(m + 6p - 3) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
- (vii)  $n = 7 + 8m$ , então  $b(n + 48p, 3, \lambda_3 = 3, 4, 5) = p_{\leq 2}(m + 6p - 1)$ .

Agora para os casos restantes em que  $\lambda_3 \leq 16p - 3$ , basta ir somando 8 nos casos  $\lambda_3 = 3, 4, 5$ , analisados acima. Porém, cada vez que somamos 8 em  $\lambda_3$ , também precisamos somar 8 em  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , de forma que vamos diminuindo 3 unidades em cada caso analisado acima. Por exemplo,  $\lambda_3 = 11$  com configuração  $(3, 3)$ , temos  $b(n + 48p, 3, \lambda_3 = 11) = p_{\leq 2}(m + 6p - 4)$ . Então, para  $n = 1 + 8m$ , temos

$$b(n + 48p, 3, \lambda_3 \leq 16p - 3) = \sum_{i=0}^{2p-1} p_{\leq 2}(m + 2 + 3i),$$

mas  $p_{\leq 2}(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ . Donde segue que  $b(n + 48p, 3, \lambda_3 \leq 16p - 3) \equiv 0 \pmod{p}$ . Prosseguindo podemos verificar que em todos os resíduos de  $n$  por 8 (com exceção do resíduo 0), teremos as seguintes somas envolvidas (os outros fatores claramente já são divisíveis por  $p$ ):

$$\sum_{i=0}^{2p-1} p_{\leq 2}(m + 2 + 3i), \quad \sum_{i=0}^{2p-1} p_{\leq 2}(m + 3i),$$

as quais já foram calculadas na prova do Teorema 3.11. □

### 3.4 Partições com partes congruentes a $\pm 1, \pm 3$ módulo 7

**Definição 3.1.** *Seja  $F_e(n)$  o número de partições de  $n$  em que nenhuma parte ímpar é repetida e nenhuma parte ímpar é menor do que uma parte par repetida, e se uma parte par é repetida então cada inteiro par menor é também uma parte repetida.*

**Definição 3.2.** *Seja  $c(n)$  a função que enumera o número de partições de  $n$  em partes  $\not\equiv 0, \pm 2 \pmod{7}$ .*

Recentemente Andrews [5] mostrou que  $F_e(n) = c(n)$ . Apresentamos resultados para a função  $c(n, k)$ , isto é, função que enumera o número de partições em exatamente  $k$  partes  $\equiv \pm 1, \pm 3 \pmod{7}$ .

**Teorema 3.14.** *Seja  $p \geq 3$  ímpar. Para todo  $n \geq 2$ ,*

$$c(n, 2) \equiv c(n + 14p, 2) \pmod{p}.$$

*Demonstração.* Afirmamos que

$$c(n, 2) = c(n + 14p, 2, \lambda_2 \geq 7p + 1).$$

De fato, se  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  é uma partição enumerada por  $c(n, 2)$ , então  $\lambda' = (\lambda_1 + 7p, \lambda_2 + 7p)$  é uma partição enumerada por  $c(n + 14p, 2, \lambda_2 \geq 7p + 1)$ , pois  $\lambda_i + 7p \equiv 3, 4, 5 \pmod{8}$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Reciprocamente, subtraindo  $7p$  de cada parte de uma partição enumerada por  $c(n + 14p, 2, \lambda_2 \geq 7p + 1)$ , obtemos uma partição enumerada por  $c(n, 2)$ . Para concluirmos a demonstração vamos mostrar que  $c(n + 14p, 2, \lambda_2 \leq 7p - 1) \equiv 0 \pmod{p}$ . Enumeramos tais partições de acordo com o resíduo de  $n$  módulo 7.

- $n \equiv 0 \pmod{7}$ ,  $\lambda_2 \equiv 1, 3, 4, 6 \pmod{7}$ , temos  $4p$  partições, pois  $\lambda_2 \leq 7p - 1$ ;
- $n \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $\lambda_2 \equiv 4 \pmod{7}$ , temos  $p$  partições;
- $n \equiv 2 \pmod{7}$ ,  $\lambda_2 \equiv 1, 3, 6 \pmod{7}$ , temos  $3p$  partições;
- $n \equiv 3 \pmod{7}$ ,  $\lambda_2 \equiv 4, 6 \pmod{7}$ , temos  $2p$  partições;
- $n \equiv 4 \pmod{7}$ ,  $\lambda_2 \equiv 1, 3 \pmod{7}$ , temos  $2p$  partições;
- $n \equiv 5 \pmod{7}$ ,  $\lambda_2 \equiv 1, 4, 6 \pmod{7}$ , temos  $3p$  partições;
- $n \equiv 6 \pmod{7}$ ,  $\lambda_2 \equiv 3 \pmod{7}$ , temos  $p$  partições.

□

**Teorema 3.15.** *Seja  $p \geq 3$  ímpar. Para todo  $n \geq 3$ ,*

$$c(n, 3) \equiv c(n + 42p, 3) \pmod{p}.$$

*Demonstração.* Primeiramente mostramos que  $c(n, 3) = c(n + 42p, 3, \lambda_3 \geq 14p + 1)$ . Dada uma partição contada por  $c(n, 3)$ , adicionando-se  $14p$  em cada parte obtemos uma partição contada por  $c(n + 42p, \lambda_3 \geq 14p + 1)$ . Reciprocamente, dada uma partição contada por  $c(n + 42p, \lambda_3 \geq 14p + 1)$  subtraindo-se  $14p$  de cada parte obtemos uma partição contada por  $c(n, 3)$ . Resta mostrar que  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 \leq 14p - 1)$  é divisível por  $p$ . Para cada valor de  $\lambda_3$  enumeramos as partições de acordo com as configurações possíveis para  $\lambda_1, \lambda_2$ , onde a configuração  $(x, y)$  indica que  $\lambda_1 \equiv x \pmod{7}$  e  $\lambda_2 \equiv y \pmod{7}$

•  $\lambda_3 = 1$

1.  $(1, 1)$ , então  $n \equiv 3 \pmod{7}$ ,  $n = 3 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p)$ ;
2.  $(1, 3)$ , então  $n \equiv 5 \pmod{7}$ ,  $n = 5 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;
3.  $(3, 1)$ , então  $n \equiv 5 \pmod{7}$ ,  $n = 5 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p)$ ;
4.  $(1, 4)$ , então  $n \equiv 6 \pmod{7}$ ,  $n = 6 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;
5.  $(4, 1)$ , então  $n \equiv 6 \pmod{7}$ ,  $n = 6 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;
6.  $(1, 6)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $n = 1 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
7.  $(6, 1)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $n = 1 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;
8.  $(3, 3)$ , então  $n \equiv 0 \pmod{7}$ ,  $n = 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;
9.  $(3, 4)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $n = 1 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
10.  $(4, 3)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $n = 1 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;
11.  $(3, 6)$ , então  $n \equiv 3 \pmod{7}$ ,  $n = 3 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
12.  $(6, 3)$ , então  $n \equiv 3 \pmod{7}$ ,  $n = 3 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;
13.  $(4, 4)$ , então  $n \equiv 2 \pmod{7}$ ,  $n = 2 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;



14.  $(4, 6)$ , então  $n \equiv 4 \pmod{7}$ ,  $n = 4 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
15.  $(6, 4)$ , então  $n \equiv 4 \pmod{7}$ ,  $n = 4 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;
16.  $(6, 6)$ , então  $n \equiv 6 \pmod{7}$ ,  $n = 6 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 1) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ .

•  $\lambda_3 = 3$

1.  $(1, 1)$ , então  $n \equiv 5 \pmod{7}$ ,  $n = 5 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
2.  $(1, 3)$ , então  $n \equiv 0 \pmod{7}$ ,  $n = 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
3.  $(3, 1)$ , então  $n \equiv 0 \pmod{7}$ ,  $n = 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
4.  $(1, 4)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $n = 1 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
5.  $(4, 1)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $n = 1 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
6.  $(1, 6)$ , então  $n \equiv 3 \pmod{7}$ ,  $n = 3 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
7.  $(6, 1)$ , então  $n \equiv 3 \pmod{7}$ ,  $n = 3 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
8.  $(3, 3)$ , então  $n \equiv 2 \pmod{7}$ ,  $n = 2 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;
9.  $(3, 4)$ , então  $n \equiv 3 \pmod{7}$ ,  $n = 3 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
10.  $(4, 3)$ , então  $n \equiv 3 \pmod{7}$ ,  $n = 3 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;
11.  $(3, 6)$ , então  $n \equiv 5 \pmod{7}$ ,  $n = 5 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
12.  $(6, 3)$ , então  $n \equiv 5 \pmod{7}$ ,  $n = 5 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ .
13.  $(4, 4)$ , então  $n \equiv 4 \pmod{7}$ ,  $n = 4 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;

14.  $(4, 6)$ , então  $n \equiv 6 \pmod{7}$ ,  $n = 6 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
15.  $(6, 4)$ , então  $n \equiv 6 \pmod{7}$ ,  $n = 6 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;
16.  $(6, 6)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $n = 1 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 3) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ .

•  $\lambda_3 = 4$

1.  $(1, 1)$ , então  $n \equiv 6 \pmod{7}$ ,  $n = 6 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
2.  $(1, 3)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $n = 1 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 4)$ ;
3.  $(3, 1)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $n = 1 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
4.  $(1, 4)$ , então  $n \equiv 2 \pmod{7}$ ,  $n = 2 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
5.  $(4, 1)$ , então  $n \equiv 2 \pmod{7}$ ,  $n = 2 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
6.  $(1, 6)$ , então  $n \equiv 4 \pmod{7}$ ,  $n = 4 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
7.  $(6, 1)$ , então  $n \equiv 4 \pmod{7}$ ,  $n = 4 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
8.  $(3, 3)$ , então  $n \equiv 3 \pmod{7}$ ,  $n = 3 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
9.  $(3, 4)$ , então  $n \equiv 4 \pmod{7}$ ,  $n = 4 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
10.  $(4, 3)$ , então  $n \equiv 4 \pmod{7}$ ,  $n = 4 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
11.  $(3, 6)$ , então  $n \equiv 6 \pmod{7}$ ,  $n = 6 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
12.  $(6, 3)$ , então  $n \equiv 6 \pmod{7}$ ,  $n = 6 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ .
13.  $(4, 4)$ , então  $n \equiv 5 \pmod{7}$ ,  $n = 5 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 1)$ ;

14.  $(4, 6)$ , então  $n \equiv 0 \pmod{7}$ ,  $n = 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
15.  $(6, 4)$ , então  $n \equiv 0 \pmod{7}$ ,  $n = 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
16.  $(6, 6)$ , então  $n \equiv 2 \pmod{7}$ ,  $n = 2 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 4) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ .

•  $\lambda_3 = 6$

1.  $(1, 1)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $n = 1 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
2.  $(1, 3)$ , então  $n \equiv 3 \pmod{7}$ ,  $n = 3 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 4)$ ;
3.  $(3, 1)$ , então  $n \equiv 3 \pmod{7}$ ,  $n = 3 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
4.  $(1, 4)$ , então  $n \equiv 4 \pmod{7}$ ,  $n = 4 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 4)$ ;
5.  $(4, 1)$ , então  $n \equiv 4 \pmod{7}$ ,  $n = 4 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
6.  $(1, 6)$ , então  $n \equiv 6 \pmod{7}$ ,  $n = 6 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ ;
7.  $(6, 1)$ , então  $n \equiv 6 \pmod{7}$ ,  $n = 6 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
8.  $(3, 3)$ , então  $n \equiv 5 \pmod{7}$ ,  $n = 5 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
9.  $(3, 4)$ , então  $n \equiv 6 \pmod{7}$ ,  $n = 6 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 4)$ ;
10.  $(4, 3)$ , então  $n \equiv 6 \pmod{7}$ ,  $n = 6 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
11.  $(3, 6)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $n = 1 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
12.  $(6, 3)$ , então  $n \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $n = 1 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 4)$ .
13.  $(4, 4)$ , então  $n \equiv 0 \pmod{7}$ ,  $n = 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 4)$ ;

14.  $(4, 6)$ , então  $n \equiv 2 \pmod{7}$ ,  $n = 2 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ ;
15.  $(6, 4)$ , então  $n \equiv 2 \pmod{7}$ ,  $n = 2 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 4)$ ;
16.  $(6, 6)$ , então  $n \equiv 4 \pmod{7}$ ,  $n = 4 + 7q$ ,  $c(n + 42p, 3, \lambda_3 = 6) = p_{\leq 2}(q + 6p - 2)$ .

Agora, na medida em que o valor de  $\lambda_3$  aumenta 7 unidades os valores de  $q + 6p - i$  decrescem 3 unidades na função  $p_{\leq 2}(q + 6p + i)$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Por exemplo, quando  $\lambda_3 = 8$  e configuração  $(1, 1)$ , o número de partições é  $p_{\leq 2}(q + 6p - 3)$ . Logo, é suficiente mostrarmos que cada uma das somas

$$\sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+3+3i)}{2} \right\rfloor, \sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+2+3i)}{2} \right\rfloor, \sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+1+3i)}{2} \right\rfloor, \sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q+3i)}{2} \right\rfloor,$$

$\sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q-1+3i)}{2} \right\rfloor$  é divisível por  $p$ . Mas, com exceção do último somatório, todos os outros já foram calculados na demonstração do Teorema 3.11. E  $\sum_{i=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{(q-1+3i)}{2} \right\rfloor = tp$  para algum  $t \in \mathbb{Z}$ , pode ser provado de maneira análoga.  $\square$

### 3.5 Partições com partes pares distintas

Seja  $ped(n)$  a função que enumera o número de partições de  $n$  em que partes pares são distintas e ímpares são irrestritas. A função geradora para  $ped(n)$ , ver [4], é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} ped(n)q^n = \frac{(q^4; q^4)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}}.$$

Andrews, Hirschhorn e Sellers [8], Chen [20], Cui e Gu [26], Hirschhorn e Sellers [31] e Xia [54] obtiveram muitas congruências interessantes módulo 2, 3, 4, 6, 8 e 12 para  $ped(n)$ . Em 2017, Merca [41] obteve uma relação de recorrência linear eficiente e estabeleceu conexões entre  $ped(n)$  e sobrepartições. Os próximos teoremas apresentam resultados para a função  $ped(n, k)$  que enumera a quantidade de partições em exatamente  $k$  partes, tais que as partes pares são distintas e as ímpares irrestritas.

**Teorema 3.16.** *Seja  $p \geq 3$  ímpar. Então,  $ped(n + 4p, 2) \equiv ped(n, 2) \pmod{p}$ .*

*Demonstração.* Observemos, inicialmente, que

$$ped(n, 2) = ped(n + 4p, 2, \lambda_2 \geq 2p + 1).$$

Com efeito, se  $(\lambda_1, \lambda_2)$  é uma partição enumerada por  $ped(n, 2)$ , então  $(\lambda_1 + 2p, \lambda_2 + 2p)$  é uma partição enumerada por  $ped(n + 4p, 2, \lambda_2 \geq 2p + 1)$ , pois, se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são partes pares distintas, então  $\lambda_1 + 2p \neq \lambda_2 + 2p$ . Reciprocamente, se  $(\gamma_1, \gamma_2)$  é uma partição enumerada por  $ped(n + 4p, 2, \lambda_2 \geq 2p + 1)$ , subtraindo  $2p$  de cada parte, por um argumento análogo ao anterior, obtemos uma partição enumerada por  $ped(n, 2)$ .

Mas  $ped(n + 4p, 2) = ped(n + 4p, 2, \lambda_2 \leq 2p) + ped(n + 4p, 2, \lambda_2 \geq 2p + 1)$ . Logo basta mostrarmos que  $ped(n + 4p, 2, \lambda_2 \leq 2p) \equiv 0 \pmod{p}$ . O que segue, pois é fácil ver que  $ped(n + 4p, 2, \lambda_2 = i) = 1$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, 2p\}$  e, portanto,  $\sum_{i=1}^{2p} ped(n + 4p, 2, \lambda_2 = i) = 2p$ .  $\square$

**Teorema 3.17.** *Seja  $p \geq 3$  ímpar. Então,  $ped(n + 12p, 3) \equiv ped(n, 3) \pmod{p}$ .*

*Demonstração.* Temos que  $ped(n + 12p, 3, \lambda_3 \geq 4p + 1) = ped(n, 3)$ . De fato, se  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  é uma partição enumerada por  $ped(n, 3)$ , então  $(\lambda_1 + 4p, \lambda_2 + 4p, \lambda_3 + 4p)$  é uma partição enumerada por  $ped(n + 12p, 3, \lambda_3 \geq 4p + 1)$ , pois se  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  são partes pares distintas, então  $\lambda_i + 4p \neq \lambda_j + 4p$ , para  $i \neq j$  e  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . A recíproca é óbvia.

Mas  $ped(n + 12p, 3) = ped(n + 12p, 3, \lambda_3 \leq 4p) + ped(n + 12p, 3, \lambda_3 \geq 4p + 1)$ . Logo, basta mostrarmos que  $ped(n + 12p, 3, \lambda_3 \leq 4p) \equiv 0 \pmod{p}$ . Dividiremos a demonstração em casos.

**Caso 1:**  $n \equiv 0, 2 \pmod{4}$ . Neste caso, se  $i$  é par e  $2 \leq i \leq 4p - 2$ , então  $ped(n + 12p, 3, \lambda_3 = i) = ped(n + 12p - i, 2, \lambda_2 \geq i + 1)$  e  $ped(n + 12p, 3, \lambda_3 = i + 1) = ped(n + 12p - i - 1, 2, \lambda_2 \geq i + 1)$ . Mas, claramente, existe uma bijeção entre as partições enumeradas por  $ped(n + 12p - i, 2, \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_2 \geq i + 1)$  e as partições enumeradas por  $ped(n + 12p - i - 1, 2, \lambda_2 \geq i + 1)$ . Além disso, temos que  $ped(n + 12p, 3, \lambda_3 = 1) = ped(n + 12p - 1, 2)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} ped(n + 12p, 3, \lambda_3 \leq 4p) &= ped(n + 12p - 1, 2) \\ &\quad + 2 \sum_{i=2}^{4p-2} ped(n + 12p - i - 1, 2, \lambda_2 \geq i + 1) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{4p-2} ped(n + 12p - i, 2, \lambda_1 = \lambda_2, \lambda_2 \geq i + 2) \\ &\quad + ped(n + 12p - 4p, 2, \lambda_2 \geq 4p + 1). \end{aligned}$$

Mas,

$$\sum_{i=2}^{4p-2} ped(n + 12p - i, 2, \lambda_1 = \lambda_2, \lambda_2 \geq i + 2) = \begin{cases} p, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{4} \\ p - 1, & \text{se } n \equiv 2 \pmod{4}, \end{cases}$$

$$ped(n + 12p - 1, 2) = \frac{n + 12p - 2}{2},$$

$$2 \sum_{i=2}^{4p-2} ped(n + 12p - i - 1, 2, \lambda_2 \geq i + 1) = (2n + 12p - 10)p + 2 - n \text{ e}$$

$$ped(n + 12p - 4p, 2, \lambda_2 \geq 4p + 1) = \begin{cases} \frac{n + 8p}{2} - 4p - 1, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{n + 8p}{2} - 4p, & \text{se } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Logo

$$ped(n + 12p, 3, \lambda_3 \leq 4p) = (2n + 12p - 3)p.$$

**Caso 2:**  $n \equiv 1, 3 \pmod{4}$ . Neste caso, é fácil ver que existe uma bijeção entre as partições enumeradas por  $ped(n + 12p - i - 1, 2, \lambda_3 \geq i + 1)$  e as partições enumeradas por  $ped(n + 12p - i, 2, \lambda_2 \geq 3, \text{se } \lambda_1 \text{ é ímpar então } \lambda_1 \geq \lambda_2 + 3)$ . Logo

$$\begin{aligned} ped(n + 12p, 3, \lambda_3 \leq 4p) &= ped(n + 12p - 1, 2) \\ &\quad + 2 \sum_{i=2}^{4p-2} ped(n + 12p - i - 1, 2, \lambda_2 \geq i + 1) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{4p-2} ped(n + 12p - i, 2, \lambda_2 \geq 3, \lambda_1 = \lambda_2 + 1, \lambda_1 \text{ ímpar}) \\ &\quad + ped(n + 12p - 4p, 2, \lambda_2 \geq 4p + 1). \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{4p-2} ped(n + 12p - i, 2, \lambda_2 \geq 3, \lambda_1 = \lambda_2 + 1, \lambda_1 \text{ ímpar}) &= \begin{cases} p, & \text{se } n \equiv 3 \pmod{4} \\ p - 1, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases} \\ ped(n + 12p - 1, 2) &= \begin{cases} \frac{n + 12p - 1}{2}, & \text{se } n \equiv 3 \pmod{4} \\ \frac{n + 12p - 1}{2} - 1, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases} \\ 2 \sum_{i=2}^{4p-2} ped(n + 12p - i - 1, 2, \lambda_2 \geq i + 1) &= \begin{cases} (2n + 12p - 10)p + 1 - n, & \text{se } n \equiv 3 \pmod{4} \\ (2n + 12p - 12)p + 3 - n, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$ped(n + 12p - 4p, 2, \lambda_2 \geq 4p + 1) = \frac{n + 8p - 1}{2} - 4p.$$

Portanto

$$ped(n + 12p, 3, \lambda_3 \leq 4p) = \begin{cases} (2n + 12p - 3)p, & \text{se } n \equiv 3 \pmod{4} \\ (2n + 12p - 5)p, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Em qualquer caso temos  $ped(n + 12p, 3, \lambda_3 \leq 4p) \equiv 0 \pmod{p}$ .

□

### 3.6 Partições cúbicas

Chan [17] introduziu em 2010 a função  $a(n)$  (número de partições cúbicas de  $n$ ), que surgiu de seu estudo de frações contínuas cúbicas de Ramanujan. Chan estabeleceu

várias congruências para este tipo de função de partição  $a(n)$ , a qual é definida por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = \frac{1}{(q; q)_{\infty}(q^2; q^2)_{\infty}}.$$

Desde então, a função  $a(n)$  tem sido objeto de vários estudos, vide [18, 19, 21, 22, 23, 32, 51, 55]. Kim [32] forneceu uma interpretação combinatória para  $a(n)$ : é o número de partições com 2-cores de  $n$  com cores  $v$  e  $b$ , sujeitas a restrição que a cor  $b$  aparece somente nas partes pares. Por exemplo, existem três tais partições de 2:

$$2^v, 2^b, 1^v + 1^v.$$

Introduzimos a seguinte generalização da função  $a(n)$ . Seja  $a_r(n)$  o número de partições de  $n$  em que as partes pares podem ter  $r$  cores e as partes ímpares apenas uma cor, cuja função geradora é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_r(n)q^n = \frac{1}{(q; q)_{\infty}(q^2; q^2)_{\infty}^{r-1}}.$$

Apresentamos resultados para  $a_r(n)$  em exatamente  $k$  partes, ou seja,  $a_r(n, k)$ .

**Teorema 3.18.** *Seja  $p \geq 3$  ímpar. Para todo  $n \geq 2$ ,*

$$a_r(n, 2) \equiv a_r(n + 4p, 2) \pmod{p}.$$

*Demonstração.* Observemos, inicialmente, que

$$a_r(n, 2) = a_r(n + 4p, 2, \lambda_2 \geq 2p + 1).$$

Com efeito, somando  $2p$  a cada parte de uma partição enumerada por  $a_r(n, 2)$ , obtemos uma partição enumerada por  $a_r(n + 4p, 2, \lambda_2 \geq 2p + 1)$ . A recíproca é óbvia. Mostraremos que  $a_r(n + 4p, 2, \lambda_2 \leq 2p) \equiv 0 \pmod{p}$ . Temos que  $a_r(n + 4p, 2, \lambda_2 \leq 2p) = \sum_{i=1}^{2p} a_r(n + 4p, 2, \lambda_2 = i)$ . Se  $n$  é par, então

$$a_r(n + 4p, 2, \lambda_2 = i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ r^2, & \text{se } i \text{ é par,} \end{cases}$$

e, portanto,  $a_r(n + 4p, 2, \lambda_2 \leq 2p) = p(r^2 + 1)$ . Se  $n$  é ímpar, então  $a_r(n + 4p, 2, \lambda_2 = i) = r$ . Logo, neste caso,  $a_r(n + 4p, 2, \lambda_2 \leq 2p) = 2pr$ . Em todos os casos temos  $a_r(n + 4p, 2, \lambda_2 \leq 2p) \equiv 0 \pmod{p}$ .

□

**Lema 3.2.**

$$a_r(n, 2) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (r^2 - 1) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \frac{r - r^2}{2}, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (r^2 - 1) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor, & \text{se } n \equiv 2 \pmod{4} \\ r \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

*Demonstração.* Se  $n \equiv 1 \pmod{2}$ , então dada uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in P(n, 2)$ , como  $n \equiv 1 \pmod{2}$ , então  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  é par. Sem perda de generalidade podemos supor  $\lambda_1$  par. Logo  $\lambda_1$  pode ter  $r$  cores diferentes e  $\lambda_2$  apenas uma cor. Portanto o número total de partições com cores geradas por  $\lambda$  é  $r$ . E tal operação é invertível, estabelecendo uma correspondência 1 a  $r$  entre  $P(n, 2)$  e  $A_r(n, 2)$ .

Lembremos que  $p_o(n, 2)$  e  $p_e(n, 2)$  denotam as funções que enumeram as partições em exatamente duas partes ímpares e pares, respectivamente. Se  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , então as partições enumeradas por  $p(n, 2)$ , cujas partes são pares, diferem por pelo menos 2. Mas cada partição enumerada por  $p_e(n, 2)$  dá origem a  $r^2$  partições enumeradas por  $a_r(n, 2)$ , pois cada parte pode ter uma das  $r$  cores. Além disso, claramente as partições enumeradas por  $p_o(n, 2)$  estão em bijeção com as partições enumeradas por  $a_r(n, 2)$  cujas partes são ímpares. Logo,

$$\begin{aligned} a_r(n, 2) &= p_o(n, 2) + r^2 p_e(n, 2) \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + r^2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (r^2 - 1) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Finalmente, se  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , temos uma partição enumerada por  $p(n, 2)$  em duas partes pares iguais. Tal partição dá origem a  $\binom{r}{2} + r$  partições, ou seja,  $\frac{r(r+1)}{2}$  partições enumeradas por  $a_r(n, 2)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} a_r(n, 2) &= p_o(n, 2) + r^2(p_e(n, 2) - 1) + \frac{r(r+1)}{2} \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (r^2 - 1) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \frac{r(r+1)}{2} - r^2. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.19.** *Seja  $p \geq 3$  ímpar. Para todo  $n \geq 3$ ,*

$$a_r(n, 3) \equiv a_r(n + 12p, 3) \pmod{p}.$$

*Demonstração.* Temos que  $a_r(n + 12p, 3, \lambda_3 \geq 4p + 1) = a_r(n, 3)$ . De fato, somando  $4p$  em cada parte de uma partição enumerada por  $a_r(n, 3)$ , obtemos uma partição enumerada por  $a_r(n + 12p, 3, \lambda_3 \geq 4p + 1)$ . A recíproca é óbvia. Mostraremos que  $a_r(n + 12p, 3, \lambda_3 \leq 4p) \equiv 0 \pmod{p}$ . Temos que

$$a_r(n + 12p, 3, \lambda_3 \leq 4p) = \sum_{i=1}^{4p} a_r(n + 12p, 2, \lambda_3 = i).$$

Dividiremos a demonstração em quatro casos e em todos os casos utilizaremos o Lema 3.2.



**Caso 1:**  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Neste caso temos,  $a_r(n + 12p, 3, \lambda_3 = i) =$

$$\begin{cases} r \left( \frac{n + 12p - i - 1}{2} - (i - 1) \right), & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ r \left( \frac{n + 12p - i}{2} + (r^2 - 1) \left\lfloor \frac{n + 12p - i}{4} \right\rfloor + \frac{r - r^2 - 2}{2} - j(2 + 2r^2) \right), & \text{se } i = 2 + 4j \\ r \left( \frac{n + 12p - i}{2} + (r^2 - 1) \left\lfloor \frac{n + 12p - i}{4} \right\rfloor - r^2 - 2 - k(2 + 2r^2) \right), & \text{se } i = 4(k + 1). \end{cases}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sum_{i \text{ ímpar}}^{4p-1} (i - 1) &= \sum_{j=0}^{2p-1} 2j = p(4p - 2), \\ \sum_{j=0}^{p-1} \left( \frac{r - r^2 - 2}{2} - j(2 + 2r^2) \right) &= p \cdot \left( \frac{r - r^2 - 2}{2} + (r^2 + 1)(1 - p) \right) \quad \text{e} \\ \sum_{k=0}^{p-1} (-r^2 - 2 - k(2 + 2r^2)) &= p \cdot (-r^2 - 2 + (r^2 + 1)(1 - p)). \end{aligned}$$

Logo, precisamos mostrar apenas que

$$\sum_{k=0}^{2p-1} \frac{n + 8p + 2k}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{n + 8p + 2k}{4} \right\rfloor$$

são divisíveis por  $p$ . Com efeito, suponha  $n = 2 + 4l$ , então

$$\sum_{k=0}^{2p-1} \frac{n + 8p + 2k}{2} = p \cdot (4l + 10p + 1)$$

e

$$\sum_{k=0}^{2p-1} \left\lfloor \frac{n + 8p + 2k}{4} \right\rfloor = p \cdot (2l + 5p),$$

o que conclui para o caso  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .

**Caso 2:**  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Neste caso:  $a_r(n + 12p, 3, \lambda_3 = i) =$

$$\begin{cases} r \left( \frac{n + 12p - i - 1}{2} - (i - 1) \right), & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ r \left( \frac{n + 12p - i}{2} + (r^2 - 1) \left\lfloor \frac{n + 12p - i}{4} \right\rfloor - 1 - j(2 + 2r^2) \right), & \text{se } i = 2 + 4j \\ r \left( \frac{n + 12p - i}{2} + (r^2 - 1) \left\lfloor \frac{n + 12p - i}{4} \right\rfloor + \frac{r(r + 1)}{2} - k(2 + 2r^2) \right), & \text{se } i = 4k. \end{cases}$$

O restante dos cálculos é análogo ao caso anterior.

**Caso 3:**  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . Então  $a_r(n + 12p, 3, \lambda_3 = i) =$

$$\begin{cases} r^2 \left( \frac{n + 12p - i - 1}{2} - (i - 1) \right), & \text{se } i \text{ é par} \\ \left( \frac{n + 12p - i}{2} + (r^2 - 1) \left\lfloor \frac{n + 12p - i}{4} \right\rfloor + \frac{r - r^2}{2} - j(2 + 2r^2) \right), & \text{se } i = 1 + 4j \\ \left( \frac{n + 12p - i}{2} + (r^2 - 1) \left\lfloor \frac{n + 12p - i}{4} \right\rfloor - r^2 - 1 - k(2 + 2r^2) \right), & \text{se } i = 3 + 4k. \end{cases}$$

**Caso 4:**  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Então  $a_r(n + 12p, 3, \lambda_3 = i) =$

$$\begin{cases} r^2 \left( \frac{n + 12p - i - 1}{2} - (i - 1) \right), & \text{se } i \text{ é par} \\ \left( \frac{n + 12p - i}{2} + (r^2 - 1) \left\lfloor \frac{n + 12p - i}{4} \right\rfloor - j(2 + 2r^2) \right), & \text{se } i = 1 + 4j \\ \left( \frac{n + 12p - i}{2} + (r^2 - 1) \left\lfloor \frac{n + 12p - i}{4} \right\rfloor \frac{r - 2 - 3r^2}{2} - k(2 + 2r^2) \right), & \text{se } i = 3 + 4k. \end{cases}$$

□

## 4 Sobrepartições planas diagonais

Neste capítulo obtemos resultados de acordo com a  $m$ -ésima maior e  $m$ -ésima menor partes de partições planas diagonais. A fim de obter tais resultados, introduzimos novos objetos denominados de sobrepartições planas diagonais. O termo *parte marcada* será usado para designar uma linha horizontal acima do objeto matemático. Desta forma,  $\overline{4}$  significa que o 4 está marcado.

### 4.1 Introdução

O diagrama de Young de uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  de  $n$ ,  $|\lambda| = n$ , é uma matriz de células com  $r$  linhas justificadas à esquerda e  $\lambda_i$  células em cada linha  $i$ . Dizemos que uma partição  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s)$  está *contida* em  $\lambda$ ,  $\mu \subset \lambda$ , se  $s \leq r$  e  $\mu_i \leq \lambda_i$  para  $i = 1, \dots, s$ . A *forma diagonal*  $\lambda/\mu$ , onde  $\mu$  está contido em  $\lambda$ , consiste em apagar aquelas células do diagrama de Young de  $\lambda$  que também são células do diagrama de Young de  $\mu$ .

Dada uma forma diagonal  $\lambda/\mu$ , uma *partição plana de forma*  $\lambda/\mu$  é um preenchimento de  $\lambda/\mu$  com inteiros não negativos, chamados partes, tal que os inteiros são não-crescentes da esquerda para a direita e de cima para baixo. Esses objetos foram introduzidos em [53] e estudados por muitos autores, como em [33, 49].

A fim de definir os novos objetos chamados sobrepartições planas diagonais, precisamos nos restringir a um certo conjunto de partições planas diagonais:

**Definição 4.1.** *Uma partição plana diagonal  $\lambda/\mu$  é chamada livre de quadrado se não existem quatro partes repetidas formando um quadrado.*

Por exemplo, considere a partição plana diagonal de forma  $(5, 5, 3, 2)/(2, 2, 1)$ . A primeira partição plana diagonal abaixo não é livre de quadrado, enquanto a segunda é livre de quadrado:

$$\begin{array}{ccc}
 3 & 3 & 1 \\
 3 & 3 & 1 \\
 4 & 2 & \\
 8 & 1 & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 7 & 3 & 1 \\
 3 & 3 & 1 \\
 4 & 2 & \\
 8 & 1 & 
 \end{array}$$

Em 2011, Corteel, Savelief e Vuletic [25] apresentaram a seguinte definição:

**Definição 4.2.** *Sobrepartição plana é uma partição plana onde: (1) em cada linha a última ocorrência de um inteiro pode ser marcada ou não e todas as outras ocorrências deste*

inteiro não são marcadas e (2) em cada coluna a primeira ocorrência de um inteiro pode ser marcada ou não e todas as outras ocorrências deste inteiro são marcadas.

Abaixo temos uma sobrepartição plana de 79:

$$\begin{array}{cccccc} 7 & 6 & \bar{6} & 5 & 3 & \bar{3} \\ \bar{7} & 5 & 5 & 4 & & \\ 6 & 4 & \bar{4} & 3 & & \\ 5 & 3 & 2 & 1 & & \end{array}$$

**Observação 4.1.** A definição de sobrepartição plana permite obter uma função geradora relacionada com sobrepartição, de maneira análoga ao que ocorre entre as funções geradoras para partições irrestritas e partições planas. Para as funções geradoras a seguir, temos que  $p(n)$ ,  $pp(n)$  denotam partições irrestritas e partições planas, respectivamente e  $\bar{p}(n)$ ,  $p\bar{p}(n)$  denotam sobrepartições e sobrepartições planas, respectivamente. Desta forma, temos as seguintes funções geradoras:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} pp(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1-q^k} \right)^k;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+q^k}{1-q^k}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p\bar{p}(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1+q^k}{1-q^k} \right)^k.$$

É importante notar que devido as duas condições acima, toda sobrepartição plana é uma partição plana livre de quadrado se removermos as marcações. Estamos interessados em sobrepartições planas com uma condição adicional:

- (3) se um inteiro é marcado então a última ocorrência deste número em cada linha é marcada.

Como exemplo, a fim de a sobrepartição plana acima satisfazer a condição (3), cada última aparição dos números 3, 4, 6 e 7 em cada linha devem ser marcadas:

$$\begin{array}{cccccc} \bar{7} & 6 & \bar{6} & 5 & 3 & \bar{3} \\ \bar{7} & 5 & 5 & \bar{4} & & \\ \bar{6} & 4 & \bar{4} & \bar{3} & & \\ 5 & \bar{3} & 2 & 1 & & \end{array}$$

Agora vamos definir os novos objetos com os quais trabalharemos.

**Definição 4.3.** *Sejam  $n$  e  $m$  inteiros tais que  $n \geq m \geq 0$ ,  $\lambda$  e  $\mu$ , respectivamente, tal que  $\mu \subset \lambda$ . Uma sobrepartição plana diagonal de forma  $\lambda/\mu$  de  $N$  é uma partição plana diagonal livre de quadrado de forma  $\lambda/\mu$  de  $N$  satisfazendo as condições (1), (2) e (3).*

De acordo com essa definição, toda sobrepartição plana satisfazendo (3) é uma sobrepartição plana diagonal de forma  $\lambda/\emptyset$ , para alguma partição  $\lambda$ . Abaixo apresentamos dois exemplos de sobrepartições planas diagonais de forma  $(5, 5, 3, 2)/(2, 2, 1)$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{8} & \bar{3} & \bar{1} & & 4 & \bar{4} & \bar{2} \\ & 3 & \bar{3} & \bar{1} & & 2 & 2 & \bar{2} \\ & \bar{3} & 2 & & & \bar{4} & \bar{2} & \\ \bar{8} & \bar{1} & & & 8 & \bar{4} & & \end{array}$$

**Definição 4.4.** *A sombra de uma sobrepartição plana diagonal de forma  $\lambda/\mu$  é a partição plana diagonal ordinária livre de quadrado de forma  $\lambda/\mu$  obtida após a remoção das marcações.*

Por exemplo, a partição plana diagonal de forma  $(5, 4, 2, 2, 1)/(3, 2)$  de 28

$$\begin{array}{cc} & 2 & 1 \\ & 4 & 2 \\ 5 & 4 & \\ 5 & 4 & \\ 1 & & \end{array}$$

é a sombra das seguintes duas sobrepartições planas diagonais de forma  $(5, 4, 2, 2, 1)/(3, 2)$ :

$$\begin{array}{ccccccc} & \bar{2} & 1 & & \bar{2} & \bar{1} & \\ & \bar{4} & \bar{2} & & \bar{4} & \bar{2} & \\ \bar{5} & \bar{4} & & & \bar{5} & \bar{4} & \\ \bar{5} & \bar{4} & & & \bar{5} & \bar{4} & \\ 1 & & & & \bar{1} & & \end{array}$$

Seja  $PG_{j+l,k}(n)$  o número de sobrepartições planas diagonais  $P$  de  $n$  tal que:  $|\lambda| \leq n$ , onde  $\lambda/\mu$  é a forma diagonal de  $P$ ,  $k$  é uma parte marcada, e exatamente  $j + l$  outras partes (maiores que  $k$ ) são marcadas, onde  $l$  é o número de partes (maiores que  $k$ ) repetidas nas colunas. Por exemplo, na sobrepartição plana diagonal acima, temos  $k = 3$ ,  $l = 1$  e  $j = 2$ .

Analogamente, denotamos por  $PS_{j+l,k}(n)$  o número de sobrepartições planas diagonais  $P$  de  $n$  tal que:  $|\lambda| \leq n$ , onde  $\lambda/\mu$  é a forma diagonal de  $P$ ,  $k$  é uma parte

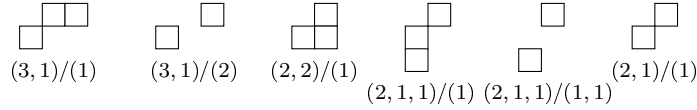


Figura 1 – As seis formas diagonais que são preenchidas de duas maneiras distintas

marcada, e exatamente  $j + l$  outras partes (menores que  $k$ ) são marcadas, onde  $l$  é o número de partes (menores que  $k$ ) repetidas nas colunas.

É importante notar que aquelas sobrepartições planas diagonais enumeradas por  $PG_{j+l,k}(n)$  ( $PS_{j+l,k}(n)$ ) não possuem nenhuma parte repetida menor (maior) que  $k$ , uma vez que elas seriam marcadas caso contrário.

Queremos encontrar fórmulas para calcular:

- $pg_m(n, k)$ , o número de partições planas diagonais livre de quadrado  $T$  de  $n$  em que  $k$  é a  $m$ -ésima maior parte, i.e., existem exatamente  $m - 1$  inteiros distintos maiores que  $k$ , e  $|\lambda| \leq n$ , onde  $\lambda/\mu$  é a forma de  $T$ . Por exemplo,  $pg_2(4, 1) = 27$ . Com efeito, as formas diagonais  $\lambda/\mu$  que devemos utilizar satisfazem  $0 \leq |\mu| \leq |\lambda| \leq 4$ . Então, temos 15 formas diagonais que são preenchidas com 1 e 2 ou com 1 e 3 de uma única maneira, enquanto existem 6 formas diagonais, listadas abaixo, que são preenchidas com 1 e 2 ou com 1 e 3 de duas maneiras diferentes.
- $ps_m(n, k)$ , o número de partições planas diagonais livre de quadrado  $T$  de  $n$  em que  $k$  é a  $m$ -ésima menor parte, i.e., existem exatamente  $m - 1$  inteiros distintos menores que  $k$ , e  $|\lambda| \leq n$ , onde  $\lambda/\mu$  é a forma de  $T$ .

Os teoremas que iremos demonstrar são:

**Teorema 4.1.**

$$pg_m(n, k) = \sum_{l \geq 0} \sum_{j \geq 0} (-1)^{j+m-1-l} \binom{j}{m-1-l} PG_{j+l,k}(n). \quad (4.1)$$

**Teorema 4.2.**

$$ps_m(n, k) = \sum_{l \geq 0} \sum_{j \geq 0} (-1)^{j+m-1-l} \binom{j}{m-1-l} PS_{j+l,k}(n). \quad (4.2)$$

Observamos que os Teoremas 1 e 2 de [11] são casos particulares dos teoremas acima, bastando considerarmos as sobrepartições como sobrepartições planas diagonais tendo somente uma linha, o que implica  $l = 0$ .

## 4.2 Demonstrações dos resultados principais

Não é difícil notar que cada partição plana diagonal livre de quadrado  $P$  de  $n$  tendo forma  $\lambda/\mu$  e  $D$  partes diferentes é a sombra de  $\binom{D-l}{j}$  sobrepartições planas diagonais de  $n$  tendo forma  $\lambda/\mu$ , em que exatamente  $j+l$  partes maiores que  $k$  são marcadas, onde  $l$  é o número de partes que são repetidas nas colunas da partição plana diagonal  $P$  (cada parte repetida é contada apenas uma vez). Por exemplo, na partição plana diagonal

$$\begin{array}{ccc} 9 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{array}$$

tomando  $k = 2$ , temos  $D = 5$  e  $l = 2$ . Então,  $0 \leq j \leq 3$ , logo temos que existem  $\binom{3}{0} = 1$ ,  $\binom{3}{1} = 3$ ,  $\binom{3}{2} = 3$ , e  $\binom{3}{3} = 1$  sobrepartições planas diagonais tendo duas, três, quatro e cinco partes diferentes marcadas maiores que  $k$ , respectivamente:

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{ccc} 9 & 7 & \bar{5} \\ 4 & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{5} & 3 & \bar{3} & 1 \\ \bar{5} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} & \begin{array}{ccc} \bar{9} & 7 & \bar{5} \\ 4 & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{5} & 3 & \bar{3} & 1 \\ \bar{5} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} & \begin{array}{ccc} 9 & 7 & \bar{5} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{5} & 3 & \bar{3} & 1 \\ \bar{5} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} & \begin{array}{ccc} 9 & \bar{7} & \bar{5} \\ 4 & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{5} & 3 & \bar{3} & 1 \\ \bar{5} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \bar{9} & 7 & \bar{5} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{5} & 3 & \bar{3} & 1 \\ \bar{5} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} & \begin{array}{ccc} 9 & \bar{7} & \bar{5} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{5} & 3 & \bar{3} & 1 \\ \bar{5} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} & \begin{array}{ccc} \bar{9} & \bar{7} & \bar{5} \\ 4 & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{5} & 3 & \bar{3} & 1 \\ \bar{5} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} & \begin{array}{ccc} \bar{9} & \bar{7} & \bar{5} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{5} & 3 & \bar{3} & 1 \\ \bar{5} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} \end{array}$$

O lema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [11], será usado na prova dos Teoremas 4.1 e 4.2.

**Lema 4.1.** *Dados inteiros não negativos  $R$  e  $D$ , temos*

$$\sum_{j \geq 0} (-1)^{j+R} \binom{j}{R} \binom{D}{j} = \begin{cases} 1, & \text{se } D = R \\ 0, & \text{se } D \neq R. \end{cases}$$

Denotamos por  $pg_{l,m}(n, k)$  ( $ps_{l,m}(n, k)$ ) o número de partições planas diagonais livre de quadrado enumeradas por  $pg_m(n, k)$  ( $ps_m(n, k)$ ) tendo exatamente  $l$  partes repetidas, maiores (menores) que  $k$ , nas colunas.

*Prova do Teorema 4.1.* Prossequimos examinando o lado direito de (4.1). Seja  $P$  uma partição plana diagonal ordinária que é a sombra de alguma sobrepartição plana diagonal enumerada por  $PG_{j+l,k}(n)$ . Assim  $k$  deve ser uma parte de  $P$  e deve haver  $D \geq j+l$  partes diferentes de  $P$  que são maiores que  $k$ . Agora, iremos encontrar qual é a contribuição para a soma

$$\sum_{j \geq 0} (-1)^{j+m-1-l} \binom{j}{m-1-l} PG_{j+l,k}(n) \quad (4.3)$$

das sobrepartições planas diagonais cuja sombra é  $P$ .

A partir das observações no início desta seção, segue que essa contribuição é  $\sum_{j \geq 0} (-1)^{j+m-1-l} \binom{j}{m-1-l} \binom{D-l}{j}$ . Pelo Lema 4.1 essa contribuição é 0, se  $D \neq m-1$ , ou 1, se  $D = m-1$ . No último caso, temos  $j = m-1-l$  e portanto existe exatamente uma sobrepartição plana diagonal contada por  $PG_{j+l,k}(n)$ , e removendo a marcação, vemos que  $P$  era uma partição plana diagonal livre de quadrado tendo  $k$  como a  $m$ -ésima maior parte. Assim em (4.3) a única contribuição, de exatamente 1, vem da sobrepartições planas diagonais em correspondência um a um com partições planas diagonais livre de quadrado em que  $k$  é a  $m$ -ésima maior parte e tendo exatamente  $l$  partes repetidas, maiores que  $k$ , nas colunas.

Portanto,

$$pg_m(n, k) = \sum_{l \geq 0} pg_{l,m}(n, k) = \sum_{l \geq 0} \sum_{j \geq 0} (-1)^{j+m-1-l} \binom{j}{m-1-l} PG_{j+l,k}(n).$$

□

A prova do Teorema 4.2 é análoga à demonstração acima, exceto que agora as outras partes marcadas além de  $k$ , são todas menores que  $k$ .



## 5 Considerações Finais

Dentre o legado de Srinivasa Ramanujan destacam-se a *primeira e segunda identidades de Rogers-Ramanujan* e as congruências do tipo  $An + B \equiv C \pmod{p}$  para partições irrestritas. Neste trabalho, por meio de uma abordagem da periodicidade módulo um primo  $p$ , pudemos deduzir várias famílias de congruências do tipo Ramanujan para funções que contam partições, dentre estas, destacamos duas,  $p_{\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m(n, k)$  e  $p_{\pm 1}^m(n, k)$ , que estão relacionadas com as *identidades de Rogers-Ramanujan*.

Pode-se observar, pelas demonstrações ao longo do texto, que a inspiração essencial para consecução dos resultados sustenta-se nas relações existentes entre as novas funções e funções bem conhecidas, notadamente as funções que enumeram as partições de um inteiro em no máximo  $k$  partes e em exatamente  $k$  partes. Sob outra perspectiva, algumas funções, tais como  $ped(n, k)$ ,  $a_r(n, k)$ ,  $p_\omega(n, k)$  e  $p_\nu(n, k)$ , exigiram o uso de suas interpretações combinatórias de forma a apoiar os resultados em suas características intrínsecas. Neste caso podemos estabelecer as provas almejadas por meio de princípios de contagem, teoria dos números e resultados clássicos em combinatória enumerativa. E, por fim, ressaltamos a importância das provas bijetivas estabelecidas majoritariamente nos Capítulos 2 e 3, em que, por vezes, um único resultado enseja o estabelecimento de várias bijeções auxiliares.

Na última parte do trabalho foi definido um novo objeto matemático denominado de sobrepartições planas diagonais e apresentamos resultados relacionados com partições planas diagonais.

Em um trabalho futuro esperamos obter novas propriedades e identidades para as funções que aqui foram apresentadas, bem como utilizar as técnicas expostas neste trabalho para o estudo de novas funções. Especificamente buscaremos estender os resultados dos Capítulos 2 e 3 para valores maiores do números de partes e obter funções geradoras para  $PG_{j+l,k}(n)$  e  $PS_{j+l,k}(n)$  que foram definidas no Capítulo 4.

# Referências

- [1] Z. Ahmed, N. D. Baruah, M. G. Dastidar *New congruences modulo 5 for the number of 2-color partitions*. Journal of Number Theory, 157, 184–198, 2015.
- [2] G. E. Andrews. *The Theory of Partitions*. Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [3] G. E. Andrews. *Partitions: At the interface of  $q$ -series and modular forms*. Ramanujan Journal, 7, 385–400, 2003.
- [4] G. E. Andrews. *Partitions with distinct evens*. Advances in Combinatorial Mathematics, 31–37, 2009.
- [5] G. E. Andrews. *Partitions early conditions*. Advances in Combinatorics, 57–76, 2013.
- [6] G. E. Andrews, E. Deutsch. *A note on a method of Erdős and the Stanley-Elder theorems*. Integers 16, Paper No. A24, 2016.
- [7] G. E. Andrews, F. G. Garvan. *Dyson’s crank of a Partition*. Bulletin of the American Mathematical Society, 10, 167–171, 1988.
- [8] G. E. Andrews, M. D. Hirschhorn, J. A. Sellers. *Arithmetic properties of partitions with even parts distinct*. Ramanujan Journal, 23, 169–181, 2010.
- [9] G. E. Andrews, E. Kimmo. *Integer partitions*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [10] G. E. Andrews, A. Dixit, A. Yee. *Partitions associated with the Ramanujan/Watson mock theta functions  $\omega(q)$ ,  $\nu(q)$  and  $\phi(q)$* . Research in Number Theory, 10(1), 1–19, 2015.
- [11] G. E. Andrews, G. Simay. *The  $m$ th Largest and  $m$ th Smallest Parts of a Partition*, *Annals of Combinatorics*, 20(4), 635–640, 2016.
- [12] S. Ahlgren, K. Ono, *Congruence properties for the partition function*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 98(9), 978–984, 2001.
- [13] A. L. O. Atkin, *Proof of a conjecture of Ramanujan*. Glasgow Mathematical Journal, 8(1), 14–32, 1967.
- [14] E. H. M. Brietzke, J. P. O. Santos, and R. da Silva. *Bijective proofs using two-line matrix representations for partitions*. The Ramanujan Journal, 23, 265–295, 2010.

- 
- [15] E. H. M. Brietzke, J. P. O. Santos, and R. da Silva. *Combinatorial interpretations as two-line array for the mock theta functions*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, 44(2), 233–253, 2013.
- [16] N. Calkin, J. Davis, K. James, E. Perez and C. Swannack. *Computing the integer partition function*. Mathematics of computation, 76(259), 1619–1638, 2007.
- [17] H.-C. Chan. *Ramanujan’s cubic continued fraction and an analogue of his “Most beautiful identity”*. International Journal of Number Theory, 6(4), 673–680, 2010.
- [18] H.-C. Chan. *Ramanujan’s cubic continued fraction and Ramanujan type congruences for a certain partition function*. International Journal of Number Theory, 6(4), 819–834, 2010.
- [19] H.-C. Chan. *Distribution of a certain partition function modulo powers of primes*. Acta Mathematica Sinica, 27(4), 625–634, 2011.
- [20] S.C. Chen. *On the number of partitions with distinct even parts*. Discrete Mathematics, 311, 940–943, 2011.
- [21] W. Y. C. Chen and B. L. S. Lin. *Congruences for the number of cubic partitions derived from modular forms*. Preprint, arXiv:0910.1263, 15 pp.
- [22] S. Chern. *New congruences for 2-color partitions*. Journal of Number Theory, 163, 474–481, 2016.
- [23] S. Chern, M. G. Dastidar. *Congruences and recursions for the cubic partition*. The Ramanujan Journal, 1–8, 2016.
- [24] S. Corteel, J. Lovejoy. *Overpartitions*. Transactions of the American Mathematical Society, 356(4), 1623–1635, 2014.
- [25] S. Corteel, C. Savelief, and M. Vuletić. *Plane Overpartitions and Cylindric Partitions*. Journal of Combinatorial Theory Series A, 118(4), 1239–1269, 2011.
- [26] S. P. Cui, N. S. S. Gu. *Arithmetic properties of  $l$ -regular partitions*. Advances in Applied Mathematics, 51, 507–523, 2013.
- [27] F. J. Dyson. *Some Guesses in the Theory of Partitions*. Eureka, 8, 10–15, 1944.
- [28] H. Göllnitz. *Partitionen mit Differenzenbedingungen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 225, 154–190, 1967.
- [29] B. Gordon, *Some continued fractions of the Rogers-Ramanujan type*. Duke Mathematical Journal, 32(4), 741–748, 1965.

- 
- [30] G. H. Hardy, . *Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work*. AMS Chelsea Publishing, New York, 1999.
- [31] M. D. Hirschhorn, J. A. Sellers. *A congruence modulo 3 for partitions into distinct non-multiples of four*. Journal of Integer Sequences, 17, Article 14.9.6, 2014.
- [32] B. Kim, *A crank analog on a certain kind of partition function arising from the cubic continued fraction*. Acta Arithmetica, 148, 1–19, 2011.
- [33] C. Krattenthaler, *Generating functions for plane partitions of a given shape*. Manuscripta Mathematica, 69, 173–201, 1990.
- [34] B. Kronholm. *On congruence properties o of  $p(n, m)$* . Proc. Amer. Math. Soc. , 133(10), 2891–2895, 2005.
- [35] B. Kronholm. *On congruence properties of consecutive values of  $p(n, m)$* . Integers, 7(10), #A16, 2007.
- [36] B. Kronholm, *Generalized congruence properties of the restricted partition function  $p(n, m)$* . The Ramanujan Journal, 30(3), 425–436, 2013.
- [37] B. Kronholm, A. Larsen *Symmetry and Prime Divisibility Properties of Partitions of  $n$  into Exactly  $m$  Parts*. Annals of Combinatorics, 19(4), 735–747, 2015.
- [38] Y. H. Kwong. *Minimum periods of partition functions modulo  $M$* . Utilitas Mathematica, 35, 3–8, 1989.
- [39] P. A. Macmahon. *The parity of  $p(n)$ , the number of partitions of  $n$ , when  $n \leq 1000$* . Journal of the London Mathematical Society, 1(4), 225–226, 1926.
- [40] K. Mahlbürg. *Partition congruences and the Andrews-Garvan-Dyson crank*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 102(43), 15373–15376, 2005.
- [41] M. Merca. *New relations for the number of partitions with distinct even parts*. Journal of Number Theory, 176, 1–12, 2017.
- [42] M. S. Mizuhara, J.A. Sellers, H. Swisher *A periodic approach to plane partition congruences*. arXiv preprint arXiv:1507.02260, 2015.
- [43] A. Nijenhuis, H.S. Wilf. *Periodicities of partition functions and Stirling numbers modulo  $p$* . Journal of Number Theory, 25(3), 308–312, 1987.
- [44] K. Ono. *Distribution of the partition function modulo  $m$* . Annals of Mathematics, 151(1), 293–307, 2000.
- [45] S. Radu, J. A. Sellers. *Congruence properties modulo 5 and 7 for the pod function*. International Journal of Number Theory, 7(8), 2249–2259, 2011.

- [46] S. Ramanujan. *Congruence properties of partitions*. Proceedings of the London Mathematical Society, 19, 207–210, 1919.
- [47] S. Ramanujan. *The Lost Notebook and Other Unpublished Papers*. Publishing House, Narosa, New Delhi, 1988.
- [48] S. Ramanujan, L. J. Rogers. *Proof of certain identities in combinatory analysis*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 19, 211–216, 1919.
- [49] B. E. Sagan. *Combinatorial proofs of hook generating functions for skew plane partitions*. Theoretical Computer Science, 117, 273–287, 1993.
- [50] J. P. O. Santos, P. Mondek, and A. C. Ribeiro. *New Two-Lines Arrays Representing Partitions*. Annals of Combinatorics, 15(2), 341–354, 2011.
- [51] J. Sinick. *Ramanujan congruences for a class of eta quotients*. International Journal of Number Theory, 6(4), 835–847, 2010.
- [52] J. L. Slater. *Further identities of the Rogers-Ramanujan type*. Proceedings of the London Mathematical Society, 2(1), 147–167, 1952.
- [53] R. P. Stanley. *Theory and applications of plane partitions, Part 1*. Studies in Applied Mathematics, 50, 167–188, 269–279, 1971.
- [54] E. Xia. *New infinite families of congruences modulo 8 for partitions with even parts distinct*. Colloquium Mathematicae, 2(142), 255–266, 2016.
- [55] X. H. Xiong. *The number of cubic partitions modulo powers of 5*. Sci Sin Math., 41, 1–15, 2011.